

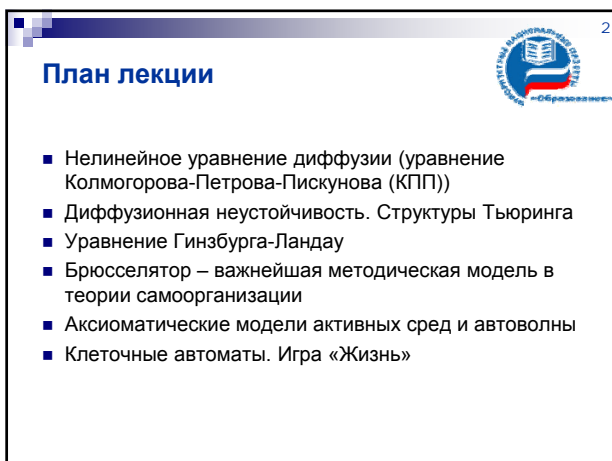
Лекция 5: Базовые модели самоорганизации и образования структур



ИННОВАЦИОННО-ОБРАЗОВАТЕЛЬНАЯ ПРОГРАММА
Саратовского государственного университета им. Н.Г.Чернышевского

Базовые модели самоорганизации и образования структур

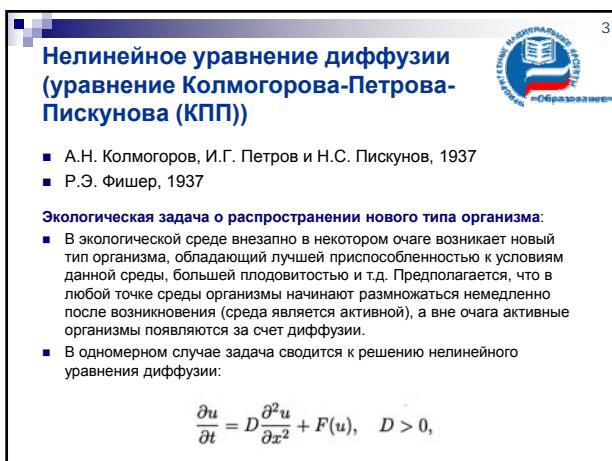
Факультет нелинейных процессов
Физика открытых нелинейных систем
Саратов - 2008



2

План лекции

- Нелинейное уравнение диффузии (уравнение Колмогорова-Петрова-Пискунова (КПП))
- Диффузионная неустойчивость. Структуры Тьюринга
- Уравнение Гинзбурга-Ландау
- Брюсселятор – важнейшая методическая модель в теории самоорганизации
- Аксиоматические модели активных сред и автоволны
- Клеточные автоматы. Игра «Жизнь»



3

Нелинейное уравнение диффузии (уравнение Колмогорова-Петрова-Пискунова (КПП))

- А.Н. Колмогоров, И.Г. Петров и Н.С. Пискунов, 1937
- Р.Э. Фишер, 1937

Экологическая задача о распространении нового типа организма:

- В экологической среде внезапно в некотором очаге возникает новый тип организма, обладающий лучшей приспособленностью к условиям данной среды, большей плодовитостью и т.д. Предполагается, что в любой точке среды организмы начинают размножаться немедленно после возникновения (среда является активной), а вне очага активные организмы появляются за счет диффузии.
- В одномерном случае задача сводится к решению нелинейного уравнения диффузии:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F(u), \quad D > 0,$$

Лекция 5: Базовые модели самоорганизации и образования структур

4

Задача КПП

- Скорость возрастания плотности организмов зависит от уже существующей и описывается функцией $F(u)$. Предполагается, что эта функция является непрерывной и необходимое число раз дифференцируемой функцией:

$$F(0) = F(1) = 0; \quad F(u) > 0, \quad 0 < u < 1;$$

$$\frac{\partial F(0)}{\partial u} = \alpha > 0, \quad \frac{\partial F(u)}{\partial u} < \alpha, \quad 0 < u \leq 1.$$
- Из последнего условия следует, что при малых u скорость роста пропорциональна u с коэффициентом пропорциональности α , при приближении к единице возрастание u прекращается. Поэтому имеет смысл рассматривать только решения уравнения, удовлетворяющие условию:

$$0 \leq u \leq 1.$$

5

Вид решения уравнения КПП

Если в начальный момент времени плотность в области $x < 0$ равна нулю, а при некотором $x > a > 0$ плотность достигает своего максимального значения, то, очевидно, область плотностей, близких к единице будет распространяться справа налево.

Участок кривой плотности, на который приходится основная часть падения плотности от 1 до 0, с течением времени также перемещается справа налево. По форме кривая плотности при приближении к предельной кривой, форма которой дается уравнением:

$$\lambda_0 \frac{du}{dx} = D \frac{d^2u}{dx^2} + F(u), \quad (1)$$

где $\lambda_0 = 2\sqrt{D\alpha}$ – предельная скорость перемещения кривой плотности

6

Вид решения уравнения КПП

Решение (1) может быть найдено из следующих соображений. Будем искать решение, обладающее тем свойством, что при изменении t форма кривой, определяющая зависимость $u(x)$ не меняется, а сама кривая перемещается справа налево со скоростью λ . Такое решение имеет вид:

$$u(x < t) = U(x + \lambda t)$$

Рассматривая теперь u как функцию бегущей координаты

$$z = x + \lambda t$$

получим уравнение

$$\lambda \frac{du}{dz} = D \frac{d^2u}{dz^2} + F(u)$$

Это уравнение имеет решения, удовлетворяющие условиям задачи при всевозможных $\lambda \geq \lambda_0$, но только при $\lambda = \lambda_0$ мы получим интересующую предельную форму кривой плотности при указанных выше начальных условиях

Лекция 5: Базовые модели самоорганизации и образования структур

7

Пространственно-распределенное логистическое уравнение

Пусть скалярная функция $u(x,t)$ удовлетворяет логистическому уравнению:

$$\frac{du}{dt} = u(1-u), \quad (2)$$


с начальными условиями:

$$u(0, x) = 1/(1 + e^{-sx}), \quad s = \text{const} > 0$$

Стационарные состояния: $du/dt = 0$

$$u_{\text{ст}} = 0 \text{ и } u_{\text{ст}} = 1$$

Иследуем стационарные состояния на устойчивость:

$$u = u_{\text{ст}} + \tilde{u}, \text{ где } \tilde{u} \ll u_{\text{ст}}$$


8

Пространственно-распределенное логистическое уравнение

$u_{\text{ст}} = 0$ $\frac{d\tilde{u}}{dt} = \tilde{u}, \quad \tilde{u} \sim e^{pt} \text{ и } p = 1,$

Таким образом, данное стационарное состояние неустойчиво.

$u_{\text{ст}} = 1$ $\frac{d\tilde{u}}{dt} = -\tilde{u}, \quad p = -1$

Данное стационарное состояние устойчиво.

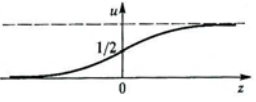

Найдем аналитическое решение уравнения (2).

Структурно неустойчивое решение

$$\frac{du}{u(1-u)} = dt, \quad t = \int \frac{du}{u(1-u)} + F(x)$$

$F(x) = \ln f(x)$ $u = \frac{1}{1 - f(x)e^{-t}}$

$z = t + sx$ $u(x, t) = \frac{1}{1 + e^{-z}}$

9

Результаты анализа уравнения КПП с квадратичной нелинейностью

Фишер рассмотрел частный случай уравнения КПП с квадратичной нелинейностью


$$\frac{\partial u}{\partial t} = ku(1-u) + D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (3)$$

Уравнение (3) можно рассматривать как простейшую диффузионную модель логистического роста популяции

Решение ищется в виде бегущей волны, для которой $0 \leq u \leq 1$

$$u(x, t) = f(z), \quad z = x + ct,$$

где c – скорость волны, которая может быть как положительной, так и отрицательной



Лекция 5: Базовые модели самоорганизации и образования структур

10

Результаты анализа уравнения КПП с квадратичной нелинейностью

Типичная картина развития во времени решения уравнения КПП (3) с квадратичной нелинейностью, демонстрирующая постоянство волновых фронтов

Скорость распространения волны определяется коэффициентом k квадратичной функции и коэффициентом диффузии:

$$c_{\min} = 2\sqrt{kD}.$$

11

Диффузионная неустойчивость. Структуры Тьюринга

- Реакционно-диффузионные модели (модель Тьюринга)
- Рассматривается два морфогена, которые реагируют друг с другом и диффундируют с различными скоростями. В отсутствие диффузии (с случае перемешивания) в результате реакции между двумя морфогенами система достигает однородного состояния. Если морфогены диффундируют с одинаковыми скоростями, то любое пространственное отклонение от устойчивого состояния будет сглаживаться.
- Если скорости диффузии будут не равны, то диффузия может оказать дестабилизирующее воздействие: скорость реакции в любой точке могут не успеть достаточно быстро подстроиться, чтобы система достигла равновесия. Если условия выбраны правильно, то малое пространственное возмущение может стать неустойчивым и начнет расти пространственная структура.
- Такая неустойчивость обусловлена диффузией и носит названия **диффузионной неустойчивости**

12

Скалярное уравнение реакции с диффузией

$$\frac{\partial u}{\partial t} = f(u) + D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Линеаризуем его около решения уравнения $f(u) = 0$
 Если стационарное состояние $u = u_0$ устойчиво при $D = 0$, то вводя обозначения $\tilde{u} = u - u_0$ и линеаризуя его около u_0 найдем

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} = \frac{\partial f(u_0)}{\partial u} \tilde{u} + D \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2}$$

Где $\partial f(u_0)/\partial u < 0$.

Поэтому при $D \neq 0$ решения $\tilde{u} \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$.

Последнее означает, что для наблюдения диффузионной неустойчивости необходима как минимум двухкомпонентная система реакций с диффузией.

Лекция 5: Базовые модели самоорганизации и образования структур

13

Анализ условий возникновения диффузионной неустойчивости

- Рассмотрим двухкомпонентную систему

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= f_1(u, v) + D_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ \frac{\partial v}{\partial t} &= f_2(u, v) + D_2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}. \end{aligned} \quad (4)$$
- Будем искать неотрицательные решения $u(x, t)$ и $v(x, t)$ в ограниченной области $0 \leq x \leq L$ с нулевым потоком на границе

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} = \frac{\partial v(x, t)}{\partial x} = 0 \text{ для всех } x = 0, L. \quad (5)$$
- Пусть существуют положительные решения \bar{u}, \bar{v} системы уравнений:

$$f_1(\bar{u}, \bar{v}) = f_2(\bar{u}, \bar{v}) = 0.$$

14

Анализ условий возникновения диффузионной неустойчивости

- В линейном приближении $\tilde{u} = u - \bar{u}, \tilde{v} = v - \bar{v}$,

$$\begin{aligned} f_1(u, v) &= f_1(\bar{u}, \bar{v}) + \frac{\partial f_1(\bar{u}, \bar{v})}{\partial u} \tilde{u} + \frac{\partial f_1(\bar{u}, \bar{v})}{\partial v} \tilde{v}, \\ f_2(u, v) &= f_2(\bar{u}, \bar{v}) + \frac{\partial f_2(\bar{u}, \bar{v})}{\partial u} \tilde{u} + \frac{\partial f_2(\bar{u}, \bar{v})}{\partial v} \tilde{v}, \end{aligned} \quad (6)$$
- Система уравнений (4) принимает вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} &= \frac{\partial f_1}{\partial u} \tilde{u} + \frac{\partial f_1}{\partial v} \tilde{v} + D_1 \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2}, \\ \frac{\partial \tilde{v}}{\partial t} &= \frac{\partial f_2}{\partial u} \tilde{u} + \frac{\partial f_2}{\partial v} \tilde{v} + D_2 \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial x^2}. \end{aligned} \quad (7)$$
- Пусть

$$\begin{Bmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{v} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} U(x) \\ V(x) \end{Bmatrix} e^{-\lambda t}. \quad (8)$$
- Тогда

$$\begin{aligned} D_1 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \lambda U + \frac{\partial f_1}{\partial u} U + \frac{\partial f_1}{\partial v} V &= 0, \\ D_2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \lambda V + \frac{\partial f_2}{\partial u} U + \frac{\partial f_2}{\partial v} V &= 0. \end{aligned} \quad (9)$$

15

Анализ условий возникновения диффузионной неустойчивости

- Если искать решения $V(x)$ и $U(x)$ в виде рядов Фурье, то граничные условия (5) выполняются автоматически:

$$\begin{Bmatrix} U(x) \\ V(x) \end{Bmatrix} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(U,V)} \cos(\sigma x), \quad \sigma = \frac{n\pi}{L}, \quad (10)$$

$$\partial U(x)/\partial x = \partial V(x)/\partial x = 0 \text{ при } x = 0 \text{ и } L.$$
- Подставляя решение (10) в систему (9) находим уравнение для собственных значений λ :

$$\begin{aligned} &\begin{vmatrix} D_1 \sigma^2 - \frac{\partial f_1}{\partial u} - \lambda & -\frac{\partial f_1}{\partial v} \\ -\frac{\partial f_2}{\partial u} & D_2 \sigma^2 - \frac{\partial f_2}{\partial v} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \\ &\lambda^2 - \lambda \left[\left(D_1 \sigma^2 - \frac{\partial f_1}{\partial u} \right) + \left(D_2 \sigma^2 - \frac{\partial f_2}{\partial v} \right) \right] + \\ &+ \left(D_1 \sigma^2 - \frac{\partial f_1}{\partial u} \right) \left(D_2 \sigma^2 - \frac{\partial f_2}{\partial v} \right) - \frac{\partial f_1}{\partial v} \frac{\partial f_2}{\partial u} = 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Лекция 5: Базовые модели самоорганизации и образования структур

16

Анализ условий возникновения диффузионной неустойчивости

■ Для нас интересен случай, когда \bar{u}, \bar{v} – устойчивое решение при $D_1 = D_2 = 0$, т.е. когда собственные значения, определенные из (11), имеют положительные действительные части, так что в системе уравнений (9)

$$\begin{cases} U(x, t) \\ V(x, t) \end{cases} \rightarrow 0 \quad \text{при } t \rightarrow \infty.$$

■ Из (11) следует, что решения уравнения

$$\lambda^2 + \lambda \left(\frac{\partial f_1}{\partial u} + \frac{\partial f_2}{\partial v} \right) + \frac{\partial f_1}{\partial u} \frac{\partial f_2}{\partial v} - \frac{\partial f_1}{\partial v} \frac{\partial f_2}{\partial u} = 0$$

при $u = \bar{u}, v = \bar{v}$ должны иметь положительные действительные части, что имеет место при выполнении условий:

$$\left[\frac{\partial f_1}{\partial u} + \frac{\partial f_2}{\partial v} \right]_{u=\bar{u}, v=\bar{v}} < 0, \quad \left[\frac{\partial f_1}{\partial u} \frac{\partial f_2}{\partial v} - \frac{\partial f_1}{\partial v} \frac{\partial f_2}{\partial u} \right]_{u=\bar{u}, v=\bar{v}} > 0. \quad (12)$$

17

Анализ условий возникновения диффузионной неустойчивости

■ Если f_1 и f_2 удовлетворяют (12), но при $D_1, D_2 \neq 0$ существует, по крайней мере, одно положительное целое число N , такое, что соответствующий параметр в (10)

$$\sigma^2 = N^2 \pi^2 / L^2$$

приводит к существованию решения λ с отрицательной действительной частью, то из вида решения ($\sim e^{-\lambda t}$) следует, что решение $\begin{cases} \bar{u} \\ \bar{v} \end{cases}$ при $u = \bar{u}, v = \bar{v}$ неустойчиво в линейном приближении.

■ Очевидно, что такая неустойчивость связана исключительно с ненулевой диффузией

18

Качественная картина развития диффузионной неустойчивости: проблема «пятнистости» в экологии

■ Любая популяция характеризуется пространственным ареалом своего распространения, особи которой перемещаются по этой площади (перемещение хищника, случайный поиск ресурсов, стремление занять свою экологическую нишу и т.д.)



■ Наиболее распространенный способ перемещения особей – случайное блуждание, поэтому при описании пространственно распределенных экосистем используют уравнения, аналогичные диффузионным уравнениям в физике, содержательную роль в которых играют роль не коэффициенты диффузии, а **радиусы индивидуальной активности**

■ **Радиус индивидуальной активности** – это среднеквадратичная оценка расстояния, на которое может переместиться особь данного вида за единицу времени (обычно в качестве единицы времени выбирается поколение, но в сообществе, состоящем из нескольких видов особей, в качестве единицы времени выбирается другой интервал времени)

Лекция 5: Базовые модели самоорганизации и образования структур

19

Качественная картина развития диффузионной неустойчивости: проблема «пятнистости» в экологии

- Наиболее ожидаемое состояние на однородном ареале – это состояние однородного равновесия, т.е. равновесные численности входящих в сообщество видов одни и те же во всех точках ареала.
- Когда это однородное по пространству равновесие будет устойчиво?
- Рассмотрим только один тип возмущений: периодические по пространству возмущения с волновым числом k и, соответственно, с пространственным периодом $L = 2\pi/k$
При $k < k_{кр}$ ($L > L_{кр}$) возможна диффузионная неустойчивость, возможность которой мы показали выше.

К объяснению возникновения диффузионной неустойчивости: α — $L = 2$, $L < L_{кр}$; возмущения гаснут; $\alpha = 0$ — $L = L_{кр}$; амплитуда возмущений растет. N^* — однородная по пространству равновесная численность, $L_{кр} = 2\pi/k_{кр} = 3$

20

Качественная картина развития диффузионной неустойчивости: проблема «пятнистости» в экологии

- Любое случайное возмущение представляет собой суперпозицию большого числа периодических возмущений с широким спектром возмущений.
- Наша экологическая система с диффузионной неустойчивостью в этом случае выступает в качестве своеобразного фильтра, который выделяет и усиливает широкомасштабные возмущения. Приведет ли неустойчивость к формированию пространственной устойчивой структуры заранее сказать нельзя, но необходимым условием формирования диссипативной структуры является наличие диффузионной неустойчивости.
- В живой природе такие экологические диссипативные структуры давно известны и связаны с проблемой, которая в экологии носит названия проблемы «пятнистости»: внутри однородного ареала проживания наблюдается крайне неоднородное распределение особей (например, пятна фитопланктона в океане).

21

Модель «хищник-жертва»

- Если в качестве точечной модели взять классическую вольтерровскую модель «хищник-жертва», то диссипативные структуры возникать не будут.
- Будем считать, что в популяции «жертвы» закон пророста численности в отсутствии «хищника» отличен от экспоненциального и численность возрастает быстрее, чем экспонента.
- Будем также считать, что «хищник» существенно более подвижен, чем «жертва».
- Такая система оказывается локально неустойчива, но перемещения особей по ареалу приводят к тому, что из бесконечного числа локально неустойчивых равновесий возникает устойчивая пространственно-неоднородная структура.

Лекция 5: Базовые модели самоорганизации и образования структур

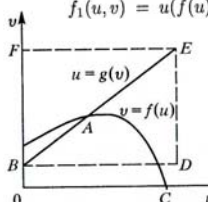
22

Модель «хищник-жертва»

Рассмотрим модель «хищник-жертва», описываемую следующими уравнениями

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= (f(u) - v)u + D_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ \frac{\partial v}{\partial t} &= (u - g(v))v + D_2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}. \end{aligned} \quad (13)$$

Сравнивая с исходной системой (4), можно заключить:

$$f_1(u, v) = u(f(u) - v), \quad f_2(u, v) = v(u - g(v))$$


Функция $f(u)$ имеет максимум при конечном $u > 0$, который отражает факт перенаселения

Точка A пересечения кривых находится слева от максимума $f(u)$

Стационарные решения (13) (обозначены буквами A, B, C на рисунке) определяются из уравнений:

$$(f(u) - v)u = 0, \quad (u - g(v))v = 0,$$

23

Модель «хищник-жертва»

Отметим, что точка равновесия A соответствует решению (\bar{u}, \bar{v})

Когда $D_1 = D_2 = 0$ мы требуем, чтобы состояние A было устойчивым, т.е. согласно условиям (12):

$$\frac{\partial f(\bar{u})}{\partial u} \bar{u} - \frac{\partial g(\bar{v})}{\partial v} \bar{v} < 0, \quad 1 - \frac{\partial f(\bar{u})}{\partial u} \frac{\partial g(\bar{v})}{\partial v} > 0 \quad (14)$$

Собственные значения находятся из уравнения (11), которое в данном случае принимает вид:

$$\lambda^2 + \lambda \left[\frac{\partial f(\bar{u})}{\partial u} \bar{u} - \frac{\partial g(\bar{v})}{\partial v} \bar{v} - (D_1 + D_2)\sigma^2 \right] + \left[D_1 D_2 \sigma^4 - \sigma^2 \left(D_2 \frac{\partial f(\bar{u})}{\partial u} \bar{u} - D_1 \frac{\partial g(\bar{v})}{\partial v} \bar{v} \right) + \bar{u} \bar{v} \left(1 - \frac{\partial f(\bar{u})}{\partial u} \frac{\partial g(\bar{v})}{\partial v} \right) \right] = 0 \quad (15)$$

< 0 (из первого условия (14))

24

Модель «хищник-жертва»

Для того, чтобы λ имела бы отрицательную действительную часть, последняя квадратная скобка в (15) должна быть для некоторого σ^2 отрицательна, т.е.:

$$D_1 \frac{\partial g(\bar{v})}{\partial v} \bar{v} < D_2 \frac{\partial f(\bar{u})}{\partial u} \bar{u}$$

В силу первого условия (14) выполнение этого неравенства требует **неравных коэффициентов диффузии: $D_1 < D_2$** .

Поскольку $\frac{\partial f(\bar{u})}{\partial u} \bar{u} > 0$ существуют $D_1, D_2 > 0$ и наименьшее положительное N , такие что слагаемое с $\sigma^2 = (N\pi/L)^2$ делает последнюю квадратную скобку в уравнении (15) отрицательной.

Отсюда следует, что хотя бы одно из решений (15) обладает отрицательной действительной частью и следовательно стационарное состояние (\bar{u}, \bar{v}) оказывается неустойчивым в линейном приближении, т.е. в системе наблюдается **диффузионная неустойчивость**

Лекция 5: Базовые модели самоорганизации и образования структур

25

Модель «хищник-жертва»: условие появления диффузионной неустойчивости

Возможность появления в модели (13) диффузионной неустойчивости существенным образом зависит от стационарного состояния (\bar{u}, \bar{v}) , а именно, от расположения точки **A** слева от максимума $f(u)$, так что $\partial f(\bar{u})/\partial u > 0$

Если бы точка A лежала бы справа от максимума, то производная была бы отрицательна и состояние (\bar{u}, \bar{v}) было бы всегда устойчиво, т.к. вторая квадратная скобка в (15) никогда бы не становилась отрицательной.

26

Модель «хищник-жертва»: численный пример

$$f(u) = \frac{35 + 16u - u^2}{9}, \quad g(v) = 1 + \frac{2v}{5},$$

$$L = 2,5; \quad D_2 = 1; \quad D_1 = 0,0125.$$

После длительного переходного процесса в системе возникают пространственные структуры (пятнистость) конечной амплитуды

Число волн определяется наименьшим числом N , придающим собственному значению λ отрицательную действительную часть. Характер волн зависит от относительной величины коэффициента диффузии.

Пространственные структуры в замкнутой области с нулевым потоком на границе для системы «хищник-жертва»

27

Дж. Марри, Нелинейные дифференциальные уравнения в биологии. Лекции о моделях:
пер. с англ. М.: Мир, 1983

«Пространственные структуры возникают также в случаях большого числа пространственных измерений и многокомпонентных системах, несомненная их важность в математической биологии развития и экологии – эти системы математически подобны. Математические задачи, связанные с ними, представляют захватывающее поле для исследований. ...наиболее волнующим аспектом этих исследований были бы подлинно междисциплинарные попытки, в котором модельные системы основывались бы на экспериментально обоснованной кинетике реакций и предсказанных или наблюдаемых пространственных структурах.»

Лекция 5: Базовые модели самоорганизации и образования структур

28

Брюсселятор – важная методическая модель в теории самоорганизации

$A \xrightarrow{k_1} X$
 $B + X \xrightarrow{k_2} Y + D$
 $2X + Y \xrightarrow{k_3} 3X$
 $X \xrightarrow{k_4} E$

k_i – абсолютные скорости реакций
 A и B – концентрации исходных реагентов
 X и Y – концентрации промежуточных продуктов

Считая концентрации исходных реагентов постоянными, для концентраций промежуточных продуктов можно записать уравнение:

$$\frac{\partial X}{\partial t} = k_1 A - (k_2 B + k_4) X + k_3 X^2 Y + D_1 \nabla^2 X$$

$$\frac{\partial Y}{\partial t} = k_2 B X - k_3 X^2 Y + D_2 \nabla^2 Y \quad (16)$$

где $\nabla^2 = \partial^2 / \partial x^2 + \partial^2 / \partial y^2 + \partial^2 / \partial z^2$

29

Переход к безразмерным переменным

Перейдем в уравнениях (16) к безразмерным переменным:

$$t = k_4 \tilde{t}, \quad X = \sqrt{\frac{k_3}{k_4}} \tilde{X}, \quad Y = \sqrt{\frac{k_3}{k_4}} \tilde{Y}, \quad A = \sqrt{\frac{k_1^2 k_3}{k_4}} \tilde{A}, \quad B = \frac{k_2}{k_4} \tilde{B}, \quad D_1 = \frac{D_1}{k_4}, \quad D_2 = \frac{D_2}{k_4}$$

Тогда получим в новых переменных следующие уравнения:

$$\frac{\partial X}{\partial t} = A - (B+1)X + X^2 Y + D_1 \nabla^2 X$$

$$\frac{\partial Y}{\partial t} = BX - X^2 Y + D_2 \nabla^2 Y \quad (17)$$

где $\nabla^2 = \partial^2 / \partial x^2 + \partial^2 / \partial y^2 + \partial^2 / \partial z^2$

30

Сосредоточенная модель брюсселятора

$$\frac{\partial X}{\partial t} = A - (B+1)X + X^2 Y + D_1 \nabla^2 X$$

$$\frac{\partial Y}{\partial t} = BX - X^2 Y + D_2 \nabla^2 Y$$

$$\frac{\partial X}{\partial t} = A - (B+1)X + X^2 Y$$

$$\frac{\partial Y}{\partial t} = BX - X^2 Y \quad (18)$$

Имеется единственная особая точка: $X = A$ и $Y = B/A$.

Лекция 5: Базовые модели самоорганизации и образования структур

31

Сосредоточенная модель брюсселятора

Исследуем на устойчивость: полагая в (18):

$$X = A + \tilde{x}, Y = B / A + \tilde{y}, \text{ где } \tilde{x} \sim e^{w t} \ll A, \tilde{y} \sim e^{w t} \ll B / A$$

Получим характеристическое уравнение:

$$w^2 - (B - 1 - A^2)w + A^2 = 0 \quad (19)$$

Решая характеристическое уравнения (19), получим:

$$w_{1,2} = \frac{1}{2}(B - 1 - A^2) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(B - 1 - A^2)^2 - 4A^2} \quad (20)$$

32

Сосредоточенная модель брюсселятора

Плоскость параметров для «сосредоточенной» модели брюсселятора:

Пример фазового портрета (а) и временных реализаций (б, в):

33

Распределенная модель брюсселятора

$$\frac{\partial X}{\partial t} = A - (B + 1)X + X^2 Y + D_1 \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} \quad (21)$$

$$\frac{\partial Y}{\partial t} = BX - X^2 Y + D_2 \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}$$

Граничные условия для системы (21) зададим двух типов:

$$\frac{\partial X(0, t)}{\partial x} = \frac{\partial X(L, t)}{\partial x} = \frac{\partial Y(0, t)}{\partial x} = \frac{\partial Y(L, t)}{\partial x} \quad (22)$$

$$X(0, t) = X(L, t); Y(0, t) = Y(L, t); \frac{\partial X(0, t)}{\partial x} = \frac{\partial X(L, t)}{\partial x}; \frac{\partial Y(0, t)}{\partial x} = \frac{\partial Y(L, t)}{\partial x} \quad (23)$$

Лекция 5: Базовые модели самоорганизации и образования структур

34

Распределенная модель брюсселятора

Система уравнений (21) с граничными условиями (22) и (23) имеет, в частности, пространственно однородное стационарное решение $X=A$ и $Y=B/A$. Дисперсионное уравнение для малых отклонений $\zeta = M e^{p t + j k x}$ и $\eta = N e^{p t + j k x}$ для этого решения:

$$(p + 1 - B + D_1 k^2)(p + A^2 + D_2 k^2) + A^2 B = 0 \quad (24)$$

Уравнение, решаемое относительно k , имеет 4 корня. Общее решение линеаризованной системы уравнений для ζ и η имеет вид:

$$\begin{aligned} \zeta(x, t) &= \sum_{i=1}^4 M_i e^{p_i t - j k_i x}, \\ \eta(x, t) &= \sum_{i=1}^4 N_i e^{p_i t - j k_i x}, \end{aligned} \quad (25)$$

$k_2 = -k_1, \quad k_4 = -k_3$

35

Распределенная модель брюсселятора

Подставляя (25) в граничные условия (22) и (23) и проводя соответствующие математические выкладки, можно получить:

$$\begin{aligned} k_1 &= \frac{2\pi m}{L} \quad \text{или} \quad k_3 = \frac{2\pi m}{L} \\ k_1 &= \frac{\pi m}{L} \quad \text{или} \quad k_3 = \frac{\pi m}{L} \end{aligned} \quad (26)$$

Подставляя (26) в (24), находим характеристическое уравнение для первого и второго типа граничных условий:

$$p^2 + (1 - B + A^2 + (D_1 + D_2)k_n^2)p + A^2(1 + D_1 k_n^2) + D_2 k_n^2(1 - B + D_1 k_n^2),$$

где $k_n = 2\pi m / L$ для первого типа граничных условий
 $k_n = \pi m / L$ для второго типа граничных условий

36

Распределенная модель брюсселятора

Из характеристического уравнения следует, что исследуемое стационарное состояние теряет устойчивость аperiodически при

$$B > B_k$$

и колебательно для

$$B_k^* < B < B_k,$$

где:

$$\begin{aligned} B_k &= 1 + D_1 k_n^2 + A^2(1 + D_1 k_n^2) / D_2 k_n^2 \\ B_k^* &= 1 + A^2 + (D_2 + D_1)k_n^2 \end{aligned}$$

Лекция 5: Базовые модели самоорганизации и образования структур

37

Уравнение Гинзбурга-Ландау (ГЛ) – эталонная модель распределенной автоколебательной среды, демонстрирующей пространственно-временной хаос.

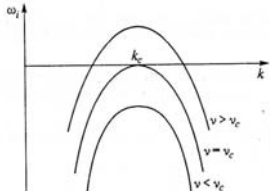
Волновые процессы в средах, характеризующихся различными типами неустойчивостей, играют важную роль в различных областях науки. Можно выделить два основных типа таких сред с неустойчивостями:

- Активные среды, в которых диссипация может быть как положительной, так и отрицательной (рабочее вещество лазера, состоящее из частиц с инверсной заселенностью, полупроводники с отрицательным дифференциальным сопротивлением, некоторые химические и биологические среды). Универсальная модель для описания таких неустойчивостей служит уравнение ГЛ
- Среда, в которых имеются некомпенсированные потоки вещества или энергии, например, гидродинамические течения или электронные потоки. Неустойчивость в таких средах определяется взаимодействием волн с положительной и отрицательной энергиями. Такие неустойчивости описываются нелинейными волновыми уравнениями типа Клейна-Гордона.

38

Феноменологический вывод уравнения ГЛ

■ Активные среды с наличием отрицательной диссипации описываются комплексными нелинейными дисперсионными соотношениями вида:

$$\omega = \omega_r(k; |a|^2) + i\omega_i(k; \nu)$$


$v < \nu_c \quad \omega_i(k; \nu) < 0$
 $v > \nu_c \quad \omega_i(k; \nu) > 0$

$$u(x, t) = a(x, t) \exp(\omega_i t) \exp[i(k_0 x - \omega_0 t)]$$

39

Феноменологический вывод уравнения ГЛ

■ Рассмотрим случай малой надкритичности и разложим дисперсионное уравнение в ряд Тейлора:

$$\nu \gtrsim \nu_c \quad k = k_c; \nu = \nu_c; |a|^2 = 0$$

$$\omega = \omega_c + \frac{\partial \omega_r}{\partial k} (k - k_c) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \omega_r}{\partial k^2} (k - k_c)^2 + \frac{i}{2} \frac{\partial^2 \omega_i}{\partial k^2} (k - k_c)^2 + \frac{\partial \omega_r}{\partial |a|^2} |a|^2 + i \frac{\partial \omega_i}{\partial |a|^2} |a|^2 + i \frac{\partial \omega_i}{\partial \nu} (\nu - \nu_c) + \dots$$

$$\omega_c = \omega_r(k_c; 0)$$

$$k = k_c, \nu = \nu_c \implies \omega_i = \frac{\partial \omega_i}{\partial k} = 0$$

Лекция 5: Базовые модели самоорганизации и образования структур

40

Феноменологический вывод уравнения ГЛ

- Введем частоту и волновое число огибающей:

$$\Omega = \omega - \omega_c, \quad K = k - k_c$$
- Для огибающей выполняются очевидные соотношения:

$$a_t = -i\Omega a, \quad a_x = iK a,$$
- Тогда нелинейному дисперсионному соотношению можно поставить в соответствие дифференциальное уравнение:

$$i(a_t + v_g a_x) + \beta a_{xx} + \gamma |a|^2 a = i\alpha a, \quad (*)$$

$$v_g = \partial\omega_r/\partial k, \quad \alpha = (\nu - \nu_c) \partial\omega_i/\partial\nu,$$

$$\beta = (1/2) (\partial^2\omega_r/\partial k^2 + i \partial^2\omega_i/\partial k^2),$$

$$\gamma = -(\partial\omega_r/\partial|a|^2 + i \partial\omega_i/\partial|a|^2).$$

41

Связь уравнения ГЛ и уравнения Ван-дер-Поля

- В пространственно-однородном случае уравнение ГЛ сводится к укороченному уравнению Ван-дер-Поля

$$A_t = \alpha A - \gamma_i |A|^2 A + i\gamma_r |A|^2 A$$

↑ ↑ ↑
 Маль-нелинейное возмущение нарастают частоты
 Мелинейное возмущение сдвиг частоты
- Уравнение ГЛ можно расширить до простейшего обобщения уравнения Ван-дер-Поля на пространственно-распределенные системы.

$$\alpha > 0 \quad \beta_r A_{xx} \quad - \text{дисперсия}$$

$$i(A_t + v_g A_x) + \beta A_{xx} + \gamma |A|^2 A = i\alpha A$$

↑ ↑ ↑
 Дисперсия
 ВЧ диссипация

Характеризуют эффекты пространственного распространения волны

42

Аксиоматические модели активных сред

- Аксиоматические модели активных сред основаны на том, что процесс возникновения и распространения возбуждения во многих живых тканях (например, мышечных или нервных) обладает рядом ярко выраженных свойств: возбуждение-рефрактерность-покой
- Активная среда представляет собой сеть, состоящая из элементов с названными свойствами, по которой могут распространяться волны возбуждения

Лекция 5: Базовые модели самоорганизации и образования структур

43

Аксиоматические модели активных сред



- Норберт Виннер, Артур Розенблют, 1946
Wiener R., Rosenblueth A. The mathematical formulation of the problem of conduction of impulses in a network of connected excitable elements, specifically in cardiac muscle. Arch. Inst. Cardiol. Mex. 16 (1946) 205-265
Модель ткани сердечной мышцы
- В.М. Гельфанд, 1960; Институт биофизики АН СССР, семинар по математической биологии: **Волны в возбудимых средах** – это широкий класс процессов с необычными свойствами, который существует не только для биологических объектов

44


Активная среда – это множество элементов с, обладающих следующими свойствами:



- Каждый элемент такого множества может находиться в одном из трех состояний: **покой**, **возбуждение** или **рефрактерность**
- Для разных элементов время возбуждения может быть различным. По прошествии времени возбуждения элемент переходит на определенное время (время рефрактерности) в рефрактерное состояние, а затем возвращается в состояние покоя
- По множеству находящихся в покое элементов возбуждение от каждого возбужденного элемента распространяется с некоторой определенной скоростью
- Возможен самопроизвольный переход элемента в возбужденное состояние по прошествии некоторого определенного времени (период спонтанной активности элемента). Отсутствию спонтанной активности соответствует ее бесконечный период

45

Явление фибрилляции



- Н. Винер и А. Розенблют сформулировали аксиоматическую модель для объяснения сердечных аритмий.
- Среди наиболее тяжелых для больных патологических режимов работы сердечной мышцы – так называемые фибрилляции.
- Фибрилляции соответствуют режиму, когда вместо ритмических согласованных сокращений сердечной мышцы возникают лишенные какой-либо упорядоченности локальные сокращения.
- Некоторые выводы о природе фибрилляций дает аксиоматическая модель

Лекция 5: Базовые модели самоорганизации и образования структур

46

Схематическое изображение этапов формирования спиральной волны

Стрелками показаны направления распространения волны возбуждения

47

Природа фибрилляций

- Вышеописанные спиральные волны получили название **ревербаторов**
- Исследования показывают, что ревербаторы через некоторое время либо исчезают, либо порождают новые ревербаторы.
- **Фибрилляциям** соответствует случай, когда ревербаторов появляется больше, чем исчезает, и в среде развивается лавинный процесс нарастания беспорядочной активности

48

Что понимается под активной (возбудимой) средой в аксиоматической модели?

- Под активной средой понимается множество элементов, обладающее следующими свойствами:
- Каждый элемент может находиться в одном из трех состояний: покой, возбуждение и рефрактерность

Лекция 5: Базовые модели самоорганизации и образования структур

49

Ведущий центр

К пояснению принципа действия ведущего центра. Темный прямоугольник обозначает элемент в возбужденном состоянии, светлый – в состоянии рефрактерности

50

Общие свойства автоволн

- Автоволна – сильно нелинейная волна, форма, амплитуда и скорость которой не зависят от начальных условий возбуждения, а зависят от свойств среды
- До и после прохождения автоволны среда находится в состоянии покоя, т.е. автоволна локализована в пространстве (движущаяся структура)
- Две автоволны при столкновении уничтожают друг друга
- Приложив к активной среде один раз внешнее воздействие, можно создать бесконечно долго живущий источник, периодически испускающий волны возбуждения (ведущий центр – источник концентрических волн, ревербатор – спиральная волна)
- Если среда неоднородна, то возможны процессы размножения источников, которые приводят к автоволновому хаосу

51

Клеточные автоматы

Томфолли Т., Марголис Н. Машины клеточных автоматов. М.: Мир, 1991

Клеточные автоматы являются дискретными динамическими системами, поведение которых полностью определяется в терминах локальных зависимостей, в значительной степени также обстоит дело для большого класса непрерывных динамических систем, определенных уравнениями в частных производных. В этом смысле клеточные автоматы в информатике являются аналогом физического понятия «поля». ... клеточный автомат может мыслиться как стилизованный мир. Пространство представлено равномерной сеткой, каждая ячейка которой, или клетка, содержит несколько битов данных; время идет вперед дискретными шагами, а законы мира выражаются единственным набором правил, скажем, небольшой справочной таблицей, по которой любая клетка на каждом шаге вычисляет свое новое состояние по состояниям ее близких соседей. Таким образом законы системы являются локальными и повсюду одинаковыми. «Локальный» означает, что для того, чтобы узнать, что произойдет здесь мгновение спустя, достаточно посмотреть на состояние ближайшего окружения: никакое дальнее действие не допускается. «Одинаковость» означает, что законы везде одни и те же: я могу отличить одно место от другого только по форме ландшафта, а не по какой-то разнице в законах


Лекция 5: Базовые модели самоорганизации и образования структур

52

Игра «Жизнь»

Джон Конуэй, 1970


- Можно считать, что игра «Жизнь» описывает популяцию неких вымышленных организмов, развивающуюся во времени и пространстве в соответствии с заданными законами размножения и вымирания.
- Исследуя эволюцию этих организмов, можно отчетливо наблюдать процессы самоорганизации и структурообразования.



53

Правила игры «Жизнь» - 1

- Пространством, на котором происходит эволюция, в игре «Жизнь» является плоскость, разделенная на квадратные ячейки.
- Обычно рассматриваются бесконечные доски, т.е. доски с таким большим числом клеток, что границы доски не достигаются, а следовательно, не играют существенной роли




54

Правила игры «Жизнь» - 2

Будем называть клетку «живой», если на ней находится фишка, в противном случае будем считать ее «мертвой», или «пустой». Время в игре «Жизнь» дискретно и измеряется в поколениях: каждый момент дискретного времени соответствует одному поколению.

Существует **набор простых правил**, описывающих рождение и гибель клеток от поколения к поколению:

- Каждая живая клетка, у которой имеется две или три живые соседние клетки, выживает и переходит в следующее поколение.
- Каждая живая клетка, у которой оказывается меньше двух живых соседей, в следующем поколении погибает от одиночества.
- Каждая живая клетка, у которой оказывается больше трех живых соседей, в следующем поколении погибает от перенаселенности.
- В каждой пустой клетке, у которой оказывается ровно три живых соседа, в следующем поколении рождается новая жизнь.




Лекция 5: Базовые модели самоорганизации и образования структур


55

Эволюция простейших популяций в игре «Жизнь»


Эволюция триплета «мигалка»: (а) начальная конфигурация в первом поколении; (б) то же самое первое поколение, с указанием гибнущих и рождающихся клеток; (в) конфигурация «мигалка» во втором поколении



а



б




в


56

Эволюция простейших популяций в игре «Жизнь»


(а) исходный триплет; (б) тот же самый триплет с указанием рождающейся клетки и (в) второе поколение – устойчивая конфигурация «блок»



а




б




в


Некоторые стационарные структуры, возникающие в игре «Жизнь»: (а) бадья; (б) лодка; (в) корабль; (г) каравай




а



б



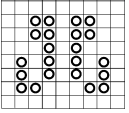
в

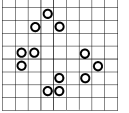


г


57

Периодические конфигурации в игре «Жизнь»






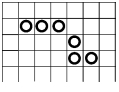
Конфигурации в игре «Жизнь», названные «долгожителями»



«Г-пентамино»
460 ходов



«ворота»
173 поколения



609 поколений

Лекция 5: Базовые модели самоорганизации и образования структур

58

Виды эволюционного развития популяции в игре «Жизнь»:




- Популяция полностью вымирает через конечное число поколений.
- Популяция с течением времени превращается в стационарную структуру, которая больше не изменяется.
- Из первоначальной популяции возникает периодически изменяющаяся во времени структура.

Существуют также конфигурации «долгожители», состоящие менее чем из десяти живых клеток, у которых устойчивое состояние не достигается в течение по крайней мере пятидесяти поколений

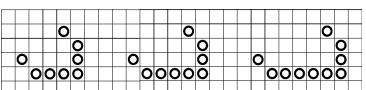
59

Периодические в пространстве конфигурации в игре «Жизнь»



 Глайдер – пространственно-временная периодическая структура, которая воспроизводит себя через четыре хода, сдвигаясь на одну клетку вниз и вправо

Существуют и более удивительные конфигурации, например, так называемое «глайдерное ружье», которое является периодической структурой с периодом в 30 поколений, причем каждый период оно «выстреливает» глайдером (отсюда, собственно говоря и название), который затем удаляется от ружья. Таким образом, каждые тридцать поколений число живых клеток увеличивается на пять, а следовательно, «глайдерное ружье» является неограниченно растущей популяцией (на бесконечном игровом поле).

 Космические корабли

60

Виды эволюционного развития популяции в игре «Жизнь»:



- Популяция развивается в течение длительного интервала дискретного времени, не погибая и не повторяя себя в своем развитии.
- Популяция является периодической пространственно-временной структурой, периодически изменяющейся во времени и передвигающейся по эволюционному пространству.
- Популяция является неограниченно растущей, на бесконечном эволюционном пространстве ее численность растет неограниченно.

Лекция 5: Базовые модели самоорганизации и образования структур

61

Особенности эволюции в игре «Жизнь»

- Любая конфигурация порождает в игре «Жизнь» только одну конфигурацию-наследника, а вот конфигураций-родителей может быть несколько. Иными словами, зная текущую конфигурацию живых клеток, можно однозначно определить конфигурацию, которая появится в следующем поколении, но вот однозначно определить конфигурацию, существовавшую на эволюционном пространстве в предшествующий момент дискретного времени, невозможно, поскольку текущая конфигурация в общем случае может быть порождена несколькими различными конфигурациями.
- Существуют такие конфигурации, у которых нет «конфигураций-родителей». Такие конфигурации называются «садами Эдема». «Сад Эдема» не может появиться в результате эволюционного развития, а должен быть искусственно привнесен извне.
- Важно отметить то обстоятельство, что хотя эволюционные правила игры «Жизнь» известны и их число невелико, предсказать заранее (a priori) результат эволюции невозможно, пока последовательно не будут пройдены все поколения от начальной конфигурации до искомой.

62

Клеточные автоматы: моделирование динамики популяции бактерий



Пространственная структура колонии бактерий *Yarrowia lipolytica*: эксперимент (сверху) и результаты численного моделирования с помощью модели класса клеточных автоматов (снизу).

Golding I., Cohen I., Ben-Jacob E.
Spatio-selection in Expanding Bacterial Colonies. Electronic preprint: <http://xyz.lanl.gov>.
arXiv:cond-mat/9811208 15 November 1998

63

Рекомендуемая литература

- Трубецков Д.И., Мчедлова Е.С., Красичков Л.В. Введение в теорию самоорганизации открытых систем. М.: Физматлит, 2002
- Тоффоли Т., Марголюс Н. Машины клеточных автоматов. М.: Мир, 1991
- Скотт Э., Волны в активных и нелинейных средах в приложении к электронике, М.: Сов. радио, 1977.
- Рыскин Н. М., Трубецков Д. И. Нелинейные волны. М.: Физматлит, 2001
- Марри Дж., Нелинейные дифференциальные уравнения в биологии. Лекции о моделях: пер. с англ. М.: Мир, 1983
