

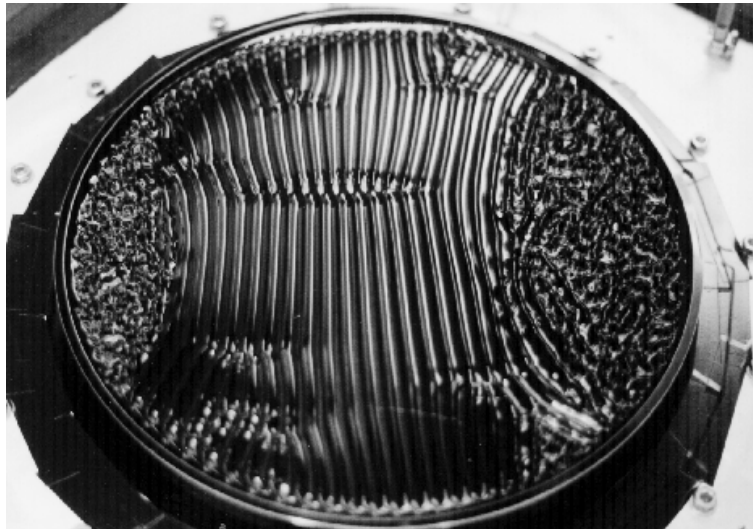
САРАТОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра электроники, колебаний и волн

Высший Колледж Прикладных Наук

А.А. КОРОНОВСКИЙ, А.Е. ХРАМОВ

**ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННЫЕ
СТРУКТУРЫ РЯБИ ФАРАДЕЯ**



Саратов — 1998

Короновский А.А., Храмов А.Е.

К68 Пространственно–временные структуры ряби Фарадея. Методическое пособие. — Саратов: Изд–во ГосУНЦ “Колледж”, 1998. — 32 с.

Настоящее учебное пособие представляет собой описание к лабораторной работе “Пространственно–временные структуры ряби Фарадея”, входящей в состав практикума по теории волновых процессов Саратовского государственного университета им. Н.Г.Чернышевского. В пособии содержатся: (1) краткий обзор научных работ (как экспериментальных, так и теоретических), посвященных изучению параметрически возбуждаемой капиллярной ряби на поверхности жидкости, (2) основные уравнения, описывающие динамику жидкости, (3) методика проведения эксперимента, (4) экспериментальное задание, (5) контрольные вопросы.

Методическое пособие предназначено для студентов высших учебных заведений, обучающихся по специальностям “Физика” и “Радиофизика”. Пособие может быть полезно аспирантам, обучающимся по вышеуказанным специальностям, а также всем, интересующимся проблемами нелинейной динамики и образования структур.

Методическое пособие издано при поддержке ФЦП «Интеграция»

Рецензент

проф., д.ф.–м.н. А.П. Четвериков

© А.А. Короновский,
А.Е. Храмов,
1998

Содержание

	Введение	5
1	Некоторые результаты натуральных и численных экспериментов	6
2	Уравнения движения жидкости	16
	2.1 Закон сохранения вещества в жидкости	16
	2.2 Уравнение Эйлера	17
3	Дисперсионное уравнение	19
4	Порог возникновения ряби Фарадея	21
5	Методика эксперимента	23
	Экспериментальное задание	24
	Контрольные вопросы	25
	Приложение 1	26
	Приложение 2	28
	Список литературы	29

Введение

Работы Фарадея по параметрическому возбуждению капиллярной ряби, возникающей на поверхности жидкого слоя, колеблющегося в вертикальном направлении, видимо являются одними из первых экспериментов по наблюдению самоорганизации в динамических системах [1]. Действительно, как писал Фарадей: “Если поместить ртуть на вибрирующую оловянную тарелку, то получается очень красивая картина в отраженных солнечных лучах” [2]. Фарадей проводил эти эксперименты с различными жидкостями (водой, чернилами, молоком, яичным белком). В своих экспериментах он использовал кюветы различной формы (круглой, квадратной, прямоугольной) и выяснил, что практически всегда рябь образует квадратную решетку, которая слегка деформируется у границы кюветы. Фарадей исследовал и процесс возникновения структуры. Он показал, что пространственная структура капиллярной ряби не зависит ни от граничных и начальных условий, ни от сорта жидкости.

Простота и наглядность данной физической системы, демонстрирующей достаточно сложные явления образования структур, пространственно-временного хаоса, сделали ее одной из базовых моделей синергетики — области научных исследований, целью которых является выявление общих закономерностей в процессах образования, устойчивости и разрушения пространственных структур, наблюдающихся в системах различной природы — физических, химических, биологических и т.д.

В настоящей лабораторной работе предстоит изучить свойства параметрически возбуждаемой капиллярной ряби: кювета с жидкостью прикреплен к мембране низкочастотного динамика, на который подается переменное напряжение с генератора низкой частоты. В зависимости от управляющих параметров системы (амплитуды и частоты внешнего воздействия, свойств жидкости) на поверхности жидкости могут образовываться как регулярные структуры квадратной формы, так и бес-

порядочно меняющиеся во времени и пространстве волны. Необходимо провести ряд измерений и сопоставить их результаты с теоретическими данными.

1 Некоторые результаты натуральных и численных экспериментов

Параметрическое возбуждение структуры на поверхности тонкого слоя жидкости является одним из наиболее изученных, как экспериментально, так и теоретически, эффектов самоорганизации в системах физической природы (см., например, [3]–[10]). Это, в первую очередь, связано с простотой изучаемой системы и наглядностью возникающих в ней явлений, отсутствием необходимости в каких-либо дополнительных устройствах для визуализации структур, возникающих при возбуждении ряби.

Когда слой жидкости со свободной верхней границей совершает вертикальные колебания, на его поверхности наблюдается возбуждение поверхностных капиллярных волн, так называемой ряби Фарадея, динамика которых зависит от управляющих параметров этой системы: вязкости, поверхностного натяжения и плотности жидкости; параметров внешнего воздействия. Последнее, как можно показать, сводится к введению осциллирующей добавки к ускорению свободного падения

$$g = g_0(1 + \beta \cos \Omega t), \quad (1)$$

где $g_0 = 9.8 \text{ м/сек}^2$, Ω – частота внешнего воздействия и β – нормированная амплитуда внешнего воздействия.

Обсудим некоторые результаты натуральных и численных экспериментов по исследованию ряби Фарадея. Исследователями были обнаружены различные динамические режимы, а так же различные сценарии перехода от одних режимов к другим при изменении управляющих параме-

тров системы, например, амплитуды внешнего воздействия или вязкости жидкости.

Большинство наблюдаемых явлений при параметрически возбуждаемой капиллярной ряби на поверхности жидкости могут быть условно классифицированы следующим образом.

1. Усложнение динамики структур на поверхности слоя жидкости при изменении амплитуды внешнего воздействия. Рассмотрим этот вопрос на примере экспериментов А.Б.Езерского, М.И.Рабиновича и др. [3]. В их экспериментах использовалось силиконовое масло с параметрами: плотность $\rho = 0.9$ г/см³, коэффициент поверхностного натяжения $\sigma = 23$ дин/см, коэффициент кинематической вязкости $\nu = 0.04$ см²/сек. Рябь Фарадея возбуждалась на поверхности слоя масла толщиной 1 см, нанесенного на вибрирующую кювету с диаметром 18 см. При частоте внешнего воздействия 140 Гц возбуждались капиллярные волны с частотой 70 Гц, что свидетельствует о параметрической природе ряби Фарадея.

С превышением величины амплитуды внешнего воздействия некоторого порогового значения $\beta_{cr} \approx 4.2$ в центре кюветы возникала рябь Фарадея, которая в отраженном свете представляется в виде сетки с квадратными ячейками. При $\beta > 5$ рябь Фарадея заполняет всю поверхность слоя. На поверхности жидкости начинает появляться модуляция контраста изображения первичной ячеистой структуры, которая имеет вид полос, вытянутых вдоль сетки. При этом наблюдается эффект, когда почти одномерная модуляция вдоль одного направления могла самопроизвольно смениться модуляцией по другому направлению. Частота смены ориентации увеличивается с ростом β . С дальнейшим ростом ($\beta > 8 \div 9$) модуляция становится все в большей степени неоднородной и неупорядоченной. В системе наблюдается развитый пространственно-временной хаос. А для $\beta > 11.5$ наблюдается отрыв капель от поверхности слоя жидкости.

2. Сложная перестройка поверхностной структуры и перемежаемость между различными режимами при изменении двух управляющих параметров (двухпараметрическое исследование). В случае двухпараметрического анализа существует возможность выделить на плоскости управляющих параметров области с различными режимами и определить сценарии перехода от одних режимов к другим. Приведем результаты такого анализа из работ Дж.Голлуба и А.Кудролли [6, 7], полученные при изменении амплитуды и частоты внешнего воздействия для силиконового масла с кинематической вязкостью $1.0 \text{ см}^2/\text{сек}$. На рис. 1 приведена карта режимов, снятая экспериментально.

Для небольшой амплитуды внешнего воздействия наблюдается спокойная поверхность жидкости. Линия, отмеченная кружками, — это линия порога неустойчивости. При превышении величины амплитуды внешнего воздействия этого порога на поверхности жидкости возникает капиллярная рябь. В случае небольшой надкритичности структуры на поверхности регулярны и представляют собой либо короткие или длинные валики (рис. 2,1), либо квадратные ячейки (рис. 2,2) или шестиугольные “сотовые” структуры (рис. 2,3). Дальнейший рост β приводит к поперечной модуляции амплитуды волн; на поверхности образуется структура с двумя фокусами на границе кюветы, причем валики подходят к границе строго перпендикулярно (рис. 2,1, см. вставку).

Далее, с ростом β в системе наблюдается режим перемежаемости (см. обложку), когда одновременно с областями регулярной динамики (правильных валиков) наблюдаются области хаотической модуляции капиллярных волн (темные области на фотографии).

На рис. 3 демонстрируется переход к пространственно-временному хаосу через разрушение шестигранных структур с увеличением амплитуды внешнего воздействия. Из рисунка видно, что переход к хаосу связан с динамикой дефектов упорядоченной пространственной структуры.

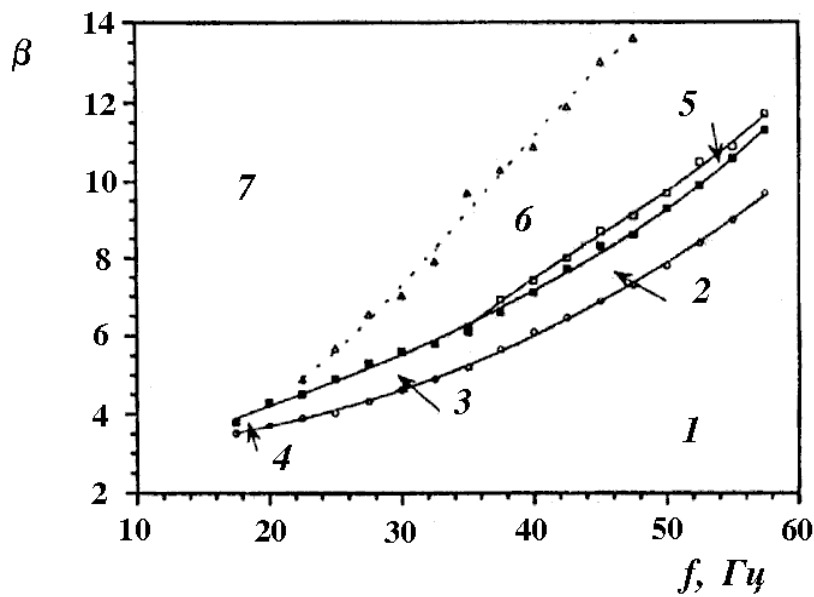


Рис. 1: Карта режимов параметрически возбуждаемых капиллярных волн [7]. Здесь цифрами обозначены области различных режимов: 1 – невозбужденная поверхность, 2 – “длинные валики”, 3 – “короткие валики”, 4 – шестиугольные структуры, 5 – модуляция амплитуды волн, 6 – перемежаемость, 7 – пространственно-временной хаос

При небольшом β (рис. 3,1) структура ячеек на поверхности лишь немного искажается возникающими дефектами. Рост интенсивности внешнего воздействия приводит к стабилизации структуры на поверхности (как видно из рис. 3,2, на поверхности наблюдается четкая и регулярная структура ряби). Дальнейший рост β ведет к разрушению упорядоченности в расположении ячеек (рис. 3,3), имеющиеся дефекты в решетке перемещаются по поверхности, причем с ростом β их число увеличивается и в итоге система переходит к пространственно-временному хаосу (рис. 3,4).

Рис. 2: Примеры различных структур, формирующихся на поверхности жидкости при параметрическом возбуждении капиллярных волн (из [7]). 1 – “длинные валики”, 2 – квадратная решетка, 3 – шестиугольные структуры

Отметим, что вышеописанная карта режимов не универсальна, и при других значениях параметров, получающиеся структуры и границы областей будут отличаться от вышеописанных.

3. Формирование многомасштабной пространственной структуры с симметрией высокого порядка при двухчастотном внешнем воздействии. В случае двухчастотного внешнего воздействия осциллирующая добавка к ускорению свободного падения запишется в виде:

$$r \sin(m\Omega t) + (1 - r) \sin(n\Omega t + \phi).$$

При фиксированном m/n основными управляющими параметрами, от которых будет зависеть поведение капиллярной ряби на поверхности жидкости, являются величины r и ϕ . Как показали эксперименты с очень

Рис. 3: Переход к пространственно-временному хаосу с увеличением амплитуды внешнего воздействия через разрушение “сотовой” структуры на поверхности жидкости (из [7])

вязкой жидкостью, возникающая на поверхности жидкости структура подобна линейным и круговым структурам в конвекции Рэлея-Бернарда около порога неустойчивости. Эксперименты В.Эдвардса и С.Фауве [8, 9] для случая $m/n = 4/5$ показали, что поверхностные волны колеблются на частоте 4Ω , если доминирует компонента внешней силы с этой частотой ($r > 0.5$), и на частоте $5/2\Omega$, если $r < 0.5$.

Кроме того, в более узких областях параметров r , ϕ были найдены более сложные пространственные структуры с высоким порядком симметрии: квадратные и шестиугольные ячейки, квазикристаллические структуры.

Обсудим последнее явление более подробно, для чего рассмотрим профиль поверхности жидкости $\xi(x, y, t)$. Как известно (см. Приложение 1), вид ряби Фарадея определяется числом пар стоячих волн ℓ , образующих структуру, при этом угол между волновыми векторами волновых пакетов будет $2\pi/\ell$. $\ell = 1$ соответствует роликам; $\ell = 2$ — квадратным ячейкам и $\ell = 3$ — шестиугольным структурам. Однако, при $\ell > 3$ не существует трансляционной симметрии, то есть нет пространственных периодов Λ_x и Λ_y , таких, что $\xi(x + \Lambda_x, y + \Lambda_y) = \xi(x, y)$. Таким образом, при $\ell = 4$ отклонение поверхности η при $t = 0$ и $y = 0$ будет задаваться [11] выражением вида

$$\xi = A_1 \cos(kx) + A_2 \cos\left(\frac{k}{\sqrt{2}} + \phi\right).$$

Это сумма пространственных гармоник с несоизмеримыми частотами k и $k/\sqrt{2}$, то есть пространственная периодичность отсутствует. Подобные структуры со свойствами симметрии вращения называются квазикристаллами. Они не обладают ближним порядком, характерным для структур с трансляционной симметрией, но зато имеют дальний порядок.

Фотография такой квазикристаллической структуры, полученной в натурном эксперименте Дж.Голлуба и А.Кудролли, приведена на рис. 4.

Видно, что на поверхности наблюдается сложная, обладающая симметрией вращения высокого порядка, картина.

Рис. 4: Рябь Фарадея при двухчастотном внешнем воздействии

4. Формирование вращающихся спиральных структур. Известно, что формирование структур в виде спиральных волн наблюдается в распределенных системах самой различной природы, например, при возникновении в сердце аритмии, в химически возбудимой среде, в биологических системах [13]. Подобная картина может наблюдаться и в эксперименте [10] по параметрическому возбуждению капиллярной ряби со специально выбранными параметрами эксперимента, а именно в кювете с большим отношением диаметра к высоте слоя жидкости (~ 30). При этом вязкость жидкости должна быть достаточно большой.

Как показал натурный эксперимент (С.В.Кияшко и др. [10]), в области параметров, соответствующих стационарным круговым волнам, путем введения возмущения (дислокаций) в “правильную” картину на поверхности жидкости, удается сформировать вращающийся спиральный

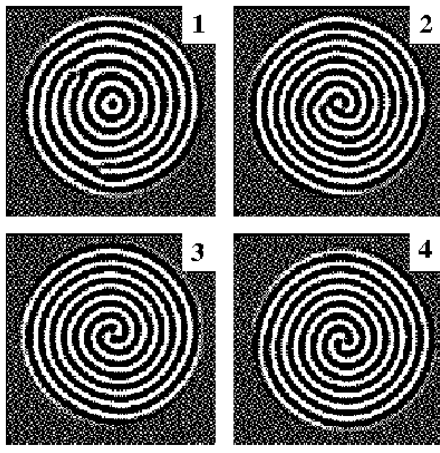


Рис. 5: Спиральные волны с топологическим зарядом $N = 2$ (по результатам численного эксперимента [10])

вихрь. Известно [13], что решение для спиральных волн в двухмерной среде в полярных координатах θ и r записывается в виде

$$\vec{u} = \vec{F}(N\theta - \omega t, r),$$

где N – число элементарных волн вращающихся вместе, или, как его называют, топологический заряд спиральной волны. В рассматриваемом случае топологический заряд волны определяется числом дислокаций n . В эксперименте N всегда равно n .

Численное моделирование с помощью феноменологической модели, основанной на уравнении Гинзбурга-Ландау (см. Приложение 1), также продемонстрировало подобную картину. Рис. 5 иллюстрирует формирование вихря с топологическим зарядом $N = 2$. Каждый из кадров иллюстрирует состояние системы в момент времени $t_i = t_0 + \Delta t \cdot (i - 1)$, где i – номер кадра. Обратите внимание, что на начальном этапе (рис. 5, 1) структура содержит две дислокации. Отметим интересный момент, связанный с динамикой дислокаций. Одна из них всегда быстро разруша-

ется на стенке кюветы, а другая медленно движется к центру (рис. 5, 2), где окончательно формируется вихрь (рис. 5, 3,4). Аналогичная ситуация и реализуется и при большем числе дислокаций.

2 Уравнения движения жидкости

2.1. Закон сохранения вещества в жидкости. Рассмотрим некоторый объем V_0 в пространстве, заполненном жидкостью с плотностью ρ . Масса жидкости, заключенной в этом объеме, будет

$$\int_{V_0} \rho dV.$$

Через малый элемент $d\vec{S}$ поверхности S за интервал времени dt протекает жидкость массы $\rho\vec{v}d\vec{S}dt$, где \vec{v} — скорость движения жидкости, а вектор $d\vec{S}$ имеет абсолютную величину $|d\vec{S}|$, равную площади элемента поверхности и направление внешней нормали этого элемента. Тогда, если жидкость вытекает из рассматриваемого объема V_0 через элемент $d\vec{S}$, то $\rho\vec{v}d\vec{S}dt > 0$, и, наоборот, когда втекает $\rho\vec{v}d\vec{S}dt < 0$. Суммарное изменение массы жидкости внутри объема V_0 за время dt будет

$$\oint_S \rho\vec{v}d\vec{S} \times dt,$$

или, с другой стороны,

$$-d \left(\int_{V_0} \rho dV \right).$$

Тогда можно записать

$$\oint_S \rho\vec{v}d\vec{S} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_{V_0} \rho dV, \quad (2)$$

Учитывая теорему Остроградского-Гаусса, связывающую объемный и поверхностный интеграл,

$$\int_V \operatorname{div}(\vec{F}(\vec{r}))dV = \int_S d\vec{S}\vec{F}(\vec{r}), \quad (3)$$

уравнение (2) можно переписать в виде

$$\int_{V_0} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) \right) dV = 0. \quad (4)$$

Поскольку уравнение (4) выполняется для произвольного объема V_0 , то

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) = 0. \quad (5)$$

Уравнение (5) называется уравнением непрерывности. Так как далее предполагается, что жидкость является несжимаемой (т.е. $\rho = \text{const}$), то уравнение (5) примет вид

$$\operatorname{div} \vec{v} = 0. \quad (6)$$

2.2 Уравнение Эйлера. Запишем теперь для объема жидкости V_0 закон движения:

$$\vec{F} = \frac{d(m\vec{v})}{dt}. \quad (7)$$

Импульс объема жидкости, заключенной в этом объеме, составляет

$$\int_{V_0} \rho \vec{v} dV, \quad (8)$$

а сила, действующая на этот объем, складывается из сил давления и гравитационных сил¹. Сила, действующая на выделенный объем V_0 , обусловленная силами давления со стороны окружающей жидкости, равна интегралу

$$- \oint_S p d\vec{S},$$

¹ Силы вязкости жидкости в данном случае не рассматриваются. Подобную модель жидкости без сил вязкости Ричард Фейнман называл “сухой” жидкостью [14].

взятому по поверхности рассматриваемого объема V_0 . Используя теорему о градиенте, преобразуем этот интеграл в интеграл по объему:

$$-\oint_S pd\vec{S} = -\int_{V_0} \text{grad} p dV. \quad (9)$$

С другой стороны на объем V_0 действует сила тяжести

$$\int_{V_0} \rho \vec{g} dV. \quad (10)$$

Тогда, исходя из закона сохранения импульса (7) и соотношений (8), (9), (10), нетрудно получить уравнение

$$\int_{V_0} \left(\rho \frac{d\vec{v}}{dt} + \text{grad} p - \rho \vec{g} \right) dV = 0, \quad (11)$$

которое должно выполняться для произвольного объема жидкости V_0 . Тогда

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{\text{grad} p}{\rho} + \vec{g}. \quad (12)$$

Заметим, что в (12) в левой части стоит полная производная $\frac{d\vec{v}}{dt}$, которую можно представить в виде

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + v_x \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} + v_y \frac{\partial \vec{v}}{\partial y} + v_z \frac{\partial \vec{v}}{\partial z}. \quad (13)$$

При этом формула (12) примет вид

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \nabla) \vec{v} = -\frac{\text{grad} p}{\rho} + \vec{g}. \quad (14)$$

Это и есть уравнение движения жидкости, полученное впервые Л.Эйлером в 1755 году [15]. Оно называется уравнением Эйлера и является одним из основных уравнений гидродинамики.

3 Дисперсионное уравнение

Учитывая, что поле скоростей является безвихревым векторным полем (в силу несжимаемости жидкости $\operatorname{div} \vec{v} = 0$), можно ввести в рассмотрение потенциал поля скоростей φ таким образом, чтобы $\vec{v} = \operatorname{grad} \varphi$. С учетом векторного соотношения $\operatorname{div} \operatorname{grad} u = \nabla^2 u$ уравнение (6) примет вид

$$\nabla^2 \varphi = 0. \quad (15)$$

Слагаемое $(\vec{v} \nabla) \vec{v}$ можно записать как

$$(\vec{v} \nabla) \vec{v} = \frac{1}{2} \operatorname{grad} v^2 - [\vec{v}, \operatorname{rot} \vec{v}]. \quad (16)$$

Тогда, учитывая (15), из уравнений (14), (16) можно получить уравнение Бернулли

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} (\nabla \varphi)^2 + \frac{p}{\rho} + U = \operatorname{const}, \quad (17)$$

где $U = gz$ – потенциальная энергия единицы массы жидкости в поле силы тяжести; z – вертикальная координата, причем точка $z = 0$ находится на невозмущенной поверхности жидкости. Учитывая, что на поверхность жидкости действует только атмосферное давление p_0 , можно переписать уравнение (17) в виде:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} (\nabla \varphi)^2 + \frac{p - p_0}{\rho} + gz = 0. \quad (18)$$

Соотношения (15) и (18), дополненные уравнением

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)_{z=-H} = 0, \quad (19)$$

которое представляет собой условие на дне жидкости, используются для получения дисперсионного уравнения гравитационно-капиллярных волн.

Известно, что если поверхность раздела двух сред искривлена, то, из-за действия сил поверхностного натяжения, давление вблизи этой поверхности подчиняется закону Лапласа:

$$p_1 - p_2 = \frac{\sigma}{R}, \quad (20)$$

где p_1 и p_2 – значения давления в различных средах вблизи границы раздела, σ – коэффициент поверхностного натяжения, R – радиус кривизны поверхности раздела.

Будем рассматривать случай, когда профиль поверхности зависит только от одной пространственной координаты и времени. В этом случае поверхность жидкости описывается уравнением $\xi = \xi(x, t)$. Тогда, учитывая, что

$$\frac{1}{R} = \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2},$$

получим

$$p - p_0 = -\sigma \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}. \quad (21)$$

Здесь p и p_0 – соответственно, давление внутри жидкости и атмосферное давление. Тогда с учетом (21) линеаризованное уравнение Бернулли (18) для поверхности жидкости будет иметь вид

$$\rho g \xi + \rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \sigma \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = 0. \quad (22)$$

Учитывая, что $\frac{\partial \varphi}{\partial z} = v_z = \frac{\partial \xi}{\partial t}$ и дифференцируя уравнение (22) по t , можно записать

$$\rho \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + \rho g \frac{\partial \varphi}{\partial z} - \sigma \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) = 0. \quad (23)$$

Полагая теперь, что $\varphi(x, z, t) = \bar{\varphi}(z) e^{j(\omega t - kx)}$, перепишем уравнение (15) в виде

$$\frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial z^2} - k^2 \bar{\varphi} = 0. \quad (24)$$

Из этого уравнения следует, что

$$\varphi(x, z, t) = A_1 e^{kz} e^{j(\omega t - kx)} + A_2 e^{-kz} e^{j(\omega t - kx)}. \quad (25)$$

Подставляя теперь (25) в (23), с учетом (19), можно получить дисперсионную характеристику:

$$\omega^2 = \left(kg + \frac{\sigma k^3}{\rho} \right) \text{th}(kH). \quad (26)$$

В том случае, когда в соотношении (26) преобладает слагаемое kg ($kg \gg \frac{\sigma k^3}{\rho}$), говорят о гравитационных волнах, если же преобладает слагаемое, связанное с действием сил поверхностного натяжения ($kg \ll \frac{\sigma k^3}{\rho}$), употребляется термин “капиллярные волны”. Если же оба слагаемых в дисперсионном соотношении (26) одного порядка, то такие волны называются гравитационно–капиллярными волнами.

4 Порог возникновения ряби Фарадея

Будем рассматривать теперь случай, когда кювета колеблется вертикально с частотой Ω . В системе отсчета, связанной с кюветой, можно считать, что периодически изменяется величина ускорения свободного падения g (1). Представим потенциал поля скоростей поверхностных волн в виде суммы пространственных гармоник с волновыми числами k_n :

$$\varphi = \sum_n \varphi_{k_n} e^{k_n x}. \quad (27)$$

Подставляя (27) в уравнение (23), с учетом (1), для каждой пространственной гармоники получаем уравнение Матье [13]:

$$\frac{\partial^2 \varphi_n}{\partial t^2} + \left(\frac{\sigma k^3}{\rho} + gk + \beta g \cos(\Omega t) \right) \varphi_n = 0. \quad (28)$$

Для капиллярных волн можно пренебречь слагаемым gk и записать уравнение Матве в классическом виде

$$\frac{\partial^2 \varphi_n}{\partial t^2} + \omega_0^2 (1 + \mu \cos(\Omega t)) \varphi_n = 0, \quad (29)$$

где $\omega_0 = \left(\frac{\sigma k^3}{\rho} \right)^{1/2}$ – частота капиллярных волн, $\mu = \frac{\beta g \rho}{\sigma k^3}$. Следовательно, в данном случае имеет место параметрическое возбуждение ряби Фарадея, и временные частоты поверхностных волн, которые могут реализовываться при параметрическом возбуждении, будут находиться с частотой внешнего воздействия в соотношении $\omega = \frac{n\Omega}{2}$, где n – целое число.

В реальной жидкости всегда есть потери, обусловленные вязким трением. Если учесть вязкость, то неустойчивость возникает только в том случае, если амплитуда внешнего воздействия превышает некоторый порог $\beta > \beta_{cr}$. Для бесконечно глубокой жидкости [11]

$$\beta_{cr} = \frac{4\Omega\nu k_0}{g}, \quad (30)$$

где

$$k_0 = \left(\left(\frac{\Omega}{2} \right)^2 \frac{\rho}{\sigma} \right)^{1/3}, \quad (31)$$

ν – кинематическая вязкость жидкости, связанная с динамической вязкостью η соотношением $\nu = \eta/\rho$. Учет конечной глубины жидкости приводит к увеличению значения β_{cr} , так как возрастают потери, связанные с трением о дно [12]. Стоит особо обратить внимание, что приведенное здесь значение β_{cr} соответствуют основному резонансу ($n = 1, \omega = \Omega/2$). Именно этот резонанс реализуется в большинстве экспериментов с капиллярными волнами. В то же время, теоретически возможно возбуждение ряби Фарадея на частотах $\omega = n\Omega/2$, $n > 1$. Почему в физическом эксперименте реализуется именно первый резонанс, легко понять, учитывая, что при резонансах более высокого порядка затухание капиллярных волн увеличивается. Потери возрастают пропорционально k^2 , а в

экспериментах порог неустойчивости для волн с частотами $\omega = n\Omega/2$, $n > 1$ не превышен [11].

5 Методика эксперимента

В данной лабораторной работе для возбуждения вертикальных колебаний в слое жидкости используется вибростенд, созданный в Нижегородском университете. Вибростенд состоит из мощного низкочастотного динамика, к мембране которого приклеена кювета. На динамик подается напряжение с генератора низкочастотных синусоидальных колебаний. **(Внимание!** При переключении пределов изменения напряжения следует следить за тем, чтобы ручка плавного изменения была выведена на ноль!) Параметрами являются глубина слоя жидкости, вязкость (в учебном эксперименте они являются постоянными), амплитуда и частота внешнего воздействия (диапазон изменения амплитуды составляет $0 \div 7$ В, а частоты – $40 \div 120$ Гц). Исследуемой в работе жидкостью является силиконовое масло (ПМС-5), характеристики которого приведены в приложении. Перед выполнением работы необходимо убедиться, что поверхность жидкости в кювете горизонтальна. В противном случае капиллярная рябь будет неравномерно распределена по поверхности. Если кювета расположена негоризонтально, её следует отъюстировать с помощью регулировочных винтов при включенном генераторе внешнего воздействия.

Для определения дисперсионной характеристики используется следующая методика. Изменяя частоту внешнего воздействия, следует измерять число периодов пространственной структуры, возникающей в кювете, приходящихся на определенную длину (например, 2–3 см). Тогда можно без труда определить длину стоячей волны λ , соответственно, длину волны и волновое число k в зависимости от частоты внешнего воздействия. При сопоставлении результатов измерений с теоретической

зависимостью (26), следует помнить о параметрическом характере возбуждения капиллярной ряби.

Для сравнения порога параметрической генерации с экспериментальными данными необходимо определить величину ускорения в м/с^2 . Измеряя напряжение, при котором проволока, помещенная на края кюветы, начинает звенеть², следует проградуировать показания вольтметра в м/с^2 . Градуировочный коэффициент зависит от частоты генератора, поэтому градуировку вольтметра следует проводить для каждого значения частоты, на которой проводится определение порога параметрического возбуждения капиллярной ряби. Следует считать, что порог возбуждения превышен, если рябь можно разглядеть на части поверхности жидкости. Понятно, что идеально отъюстировать кювету невозможно, а следовательно, существует область жидкости, для которой условие возбуждения начинает выполняться для меньшей амплитуды внешнего воздействия. Когда капиллярная рябь покрывает всю поверхность жидкости, значение амплитуды внешнего воздействия существенно превышает порог параметрической генерации.

Экспериментальное задание

1. Откалибровать шкалу вольтметра в единицах ускорения. Построить зависимость нормировочного множителя от частоты сигнала генератора.
2. При включенном генераторе внешнего воздействия с помощью регулировочных винтов отъюстировать кювету с жидкостью.
3. Определить дисперсионную зависимость $\omega = \omega(k)$. Для этого необходимо определить размер структуры, возникающей в кювете при различных значениях частоты внешнего воздействия. Частоту

² При ускорении близком к g_0 (ускорению силы тяжести) предметы, находящиеся на вибрирующей поверхности начинают подпрыгивать

внешнего воздействия изменять в пределах от 40 до 120 Гц с интервалом 5 Гц. Построить полученную зависимость в координатах ω и k и сравнить ее с теоретической.

4. Снять экспериментальную зависимость порога возбуждения капиллярной ряби от частоты внешнего воздействия и сравнить полученную кривую с теоретической.
5. Пронаблюдать возникновение пространственно-временного хаоса на поверхности жидкости с изменением амплитуды внешнего воздействия при различных значениях частоты. Схематически изобразить карту режимов на плоскости управляющих параметров “амплитуда — частота внешнего воздействия”.
6. Зарисовать характерные пространственные структуры, возникающие на поверхности жидкости в различных областях карты режимов.

Контрольные вопросы

1. Опишите основные явления, которые наблюдаются при параметрическом возбуждении капиллярной ряби.
2. Выведите уравнение непрерывности для жидкости. Как оно будет выглядеть в случае несжимаемой жидкости?
3. Назовите основные допущения, используемые при выводе уравнения Эйлера.
4. Запишите дисперсионное уравнение для гравитационно-капиллярных волн на мелкой воде. Опишите методику получения дисперсионного уравнения из гидродинамических уравнений.
5. Какой тип поверхностных волн (гравитационные или капиллярные волны) реализуется при наблюдении ряби Фарадея? Ответ обоснуйте.

6. Какие частоты поверхностных волн могут реализовываться в жидкости без вязкого трения при периодическом внешнем воздействии с частотой Ω ? Что изменится для случая вязкой жидкости?
7. Объясните, почему при небольшом превышении значения амплитуды внешнего воздействия порога возбуждения, капиллярная рябь занимает небольшую область поверхности жидкости.
8. С чем связано установление той или иной конкретной структуры на поверхности жидкости? Как появляется модельное уравнение (33)? Выведите величину дисперсионного параметра κ в уравнении (33), предполагая одномерный случай, то есть $\vec{r} = (x, 0)$.
9. Опишите методику проведения эксперимента.

Приложение 1

Как следует из раздела 4, пары волн с волновым вектором \vec{k} , удовлетворяющим условию $|\vec{k}| = |k_0|$ (см., (31)), будут нарастать с максимальным инкрементом, при этом ориентация волновых пар в пространстве будет произвольна. Структура на поверхности жидкости будет определяться нелинейной конкуренцией волн с различной ориентацией вектора \vec{k} . В первую очередь она связана с нелинейным затуханием волн. Когда амплитуда капиллярных волн возрастает, из-за нелинейности среды генерируются гармоники основной волны. Амплитуда высших гармоник пропорциональна квадрату амплитуды основной гармоники, а затухание их существенно больше, чем затухание основной волны в силу того, что их волновые числа $k_n \sim nk_0$. Поэтому генерацию гармоник можно рассматривать как механизм нелинейного затухания, которое приводит к ограничению амплитуды волн. Очевидно, что нелинейное затухание определяет не только амплитуду волн, но и наиболее предпочтительную структуру на поверхности жидкости, которая обуславливается конкуренцией волновых пар с различной ориентацией волнового векто-

ра. Отметим, что величина амплитуды волнового вектора всех пакетов одинакова, что и приводит к возникновению регулярных структур на поверхности.

Эффект нелинейного затухания можно учесть в уравнениях, описывающих эволюцию амплитуд параметрически возбуждаемых пар волн. В рамках приближения медленно меняющихся амплитуд волн в пространстве и во времени, можно с помощью методов возмущений записать уравнения для медленно меняющихся амплитуд волн. Здесь мы не приводим соответствующих соотношений вследствие их громоздкости и сложности для анализа (для интересующихся можно порекомендовать работы [3, 16]). Однако, ограничиваясь исследованием чисто стоячих волн, при определенных предположениях (в первую очередь о небольшой надкритичности β/β_{cr}) задача может быть сведена к более простому модельному уравнению.

Пусть $\xi(\vec{r}, t)$, представляющая собой главную часть отклонения уровня поверхности от равновесной, записывается в виде [10]

$$\xi(\vec{r}, t) = \psi(\vec{r}, t)e^{j(\Omega/2)t} + \psi^*(\vec{r}, t)e^{-j(\Omega/2)t}. \quad (32)$$

Модельное уравнение для комплексного поля ψ основывается на параметрическом аналоге уравнения Гинзбурга – Ландау [3], и может быть записано в следующей форме [10]

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial t} = j\gamma\psi^* - \nu \nabla^2 \psi - (1 + j\alpha)|\psi|^2\psi + \\ + j\kappa(\nabla^2 + k_0^2)\psi - (\vec{u} \cdot \nabla)\psi. \end{aligned} \quad (33)$$

Данное уравнение учитывает основные особенности параметрической неустойчивости, дисперсию капиллярных волн, вязкую диссипацию и нелинейность. Здесь γ – параметр амплитуды внешней силы, κ – дисперсионный параметр и \vec{u} – скорость среднего течения жидкости около поверхности. Линейные члены уравнения (33) ответственны за дисперсию,

вследствие этого, как не сложно показать, $\kappa = 3\Omega/8k_0^2$. Нелинейный член введен феноменологически для стабилизации параметрической неустойчивости. Мнимая часть коэффициента нелинейности α описывает нелинейный сдвиг частоты [17]. Последний член в уравнении описывает среднее течение (если $\vec{u} \neq 0$) в слое жидкости.

Данная модель, несмотря на некоторые серьезные допущения и упрощения, позволяет описать целый ряд явлений, наблюдаемых при возбуждении капиллярной ряби. Так, численное моделирование формирования спиральных структур при параметрическом возбуждении слоя жидкости (см., раздел 1.4 и рис. 5) моделировалось именно с помощью уравнения (33).

Приложение 2

Свойства силиконового масла ПМС-5

ρ , [г/см ³]	η , [г/(см сек)]*10 ²	σ , [дин/см]
плотность	динамическая вязкость	поверхностное натяжение
0,913	4,63	17,5

Список литературы

- [1] *M.Faraday*, Philos.Trans.R.Soc., London, **121** (1831) 319
- [2] Introduction to Faraday's Diary, ed by T.Martin, London: G.Bell, 1932
- [3] *А.Б.Езерский, М.И.Рабинович, В.П.Реутов, И.М.Старобинец* Пространственно-временной хаос при параметрическом возбуждении капиллярной ряби. ЖЭТФ, **91** (2070) 1986
- [4] Езерский А.Б., Кияшко С.В., Матусов С.В., Рабинович М.И. Динамика доменов в параметрически возбуждаемой капиллярной ряби. Изв. ВУЗов, Прикладная нелинейная динамика. **2** (64) 1994
- [5] Ezersky A.B. Temporal intermittency of chaos in parametrically excited capillary ripples. Europhys. Lett. **16** (661) 1991
- [6] *A.Kudrolli, J.P.Gollub*, Localized spatiotemporal chaos in surface waves. Phys.Rev.E., **54** (R1052) 1996
- [7] *A.Kudrolli, J.P.Gollub*, Patterns and spatiotemporal chaos in parametrically forced surface waves: a systematic survey at large aspect ratio. Physica D, **97** (133) 1996
- [8] *W.S.Edwards, S.Fauve*, Phys.Rev.E, **47** (123) 1993
- [9] *W.S.Edwards, S.Fauve*, J.Fluid Mech., **278** (123) 1994
- [10] *S.V.Kiyashko, L.N.Korzinov, M.I.Rabinovich, L.S.Tsimring*, Rotating spirals in Faraday experiment. Phys.Rev.E, **54** (5037) 1996
- [11] Структуры и пространственно-временной хаос параметрически возбуждаемой капиллярной ряби (описание к лабораторной работе), Нижний Новгород: Нижегородский университет.
- [12] *С.В.Кияшко*, Структуры при параметрическом возбуждении капиллярной ряби в слое с плавной неоднородностью глубины. Труды VI Всероссийской школы-семинара "Волновые явления в неоднородных средах", Красновидово, Московская область, (101) 1998
- [13] *М.И.Рабинович, Д.И.Трубецков*, Введение в теорию колебаний и волн. М.: Наука, 1984.

- [14] *Р.Фейнман, Р.Лейтон, М.Сэндс*, Фейнмановские лекции по физике. Том 7. Физика сплошных сред. М.: Мир. 1977
- [15] *Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц*, Теоретическая физика. Том VI. Гидродинамика. М.: Наука. 1988
- [16] *S.T.Milner*, Square pattern and secondary instabilities in driven capillary ripples. *J.Fluid.Mech.*, **1991** (81) 1991
- [17] *A.S.Nikulin, L.N.Korzinov, M.I.Rabinovich*, *Phys.Lett.A.*, **173** (421) 1993

Методическое пособие

КОРОНОВСКИЙ А.А.
ХРАМОВ А.Е.

Пространственно–временные структуры ряби Фарадея

Оригинал-макет подготовлен *А.Е. Храмовым* в пакете L^AT_EX

ГосУНЦ “КОЛЛЕДЖ”, Лицензия 020773 от 15.05.98

Заказ N. 81. Подписано к печати 1.09.98.

Усл. печ.л. 1,86 (2,0). Уч.-изд.л. 2,1. Тираж 100 экз.

410026, Саратов, Астраханская, 83

ГосУНЦ “Колледж”