

УДК:530.182

## ИССЛЕДОВАНИЕ ИНДУЦИРОВАННОЙ ШУМОМ ПЕРЕМЕЖАЕМОСТИ В МУЛЬТИСТАБИЛЬНЫХ СИСТЕМАХ НА ПРИМЕРЕ МОДЕЛЬНЫХ СИСТЕМ

© 2018 г. М. О. Журавлев<sup>1, а</sup>, А. А. Короновский<sup>1</sup>, О. И. Москаленко<sup>1</sup>, А. Е. Храмов<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования  
Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского

<sup>2</sup>Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования  
Саратовский государственный технический университет имени Ю.А. Гагарина

E-mail:azhuravlevmo@gmail.com

Проведено исследование индуцированного шумом перемежающегося поведения в мультистабильных системах на примере модельной системы с потоковым временем (генератор Чуа). В работе показано, что при внешнем шумовом воздействии на генератор Чуа при определенных значениях управляющих параметров наблюдается индуцированная шумом перемежаемость. Получены статистические характеристики для данного типа поведения, которые сопоставлены с теоретическими закономерностями.

DOI:

### ВВЕДЕНИЕ

Мультистабильность является одним из фундаментальных физических явлений, которое можно наблюдать почти во всех областях науки и техники, в том числе в электронике [1], оптике [2], механике [3] и биологии [4]. Впервые термин «мультистабильность» был введен в работе, посвященной зрительному восприятию [5]. Для диссипативных систем мультистабильность означает одновременное существование нескольких возможных конечных устойчивых состояний (аттракторов) при фиксированном наборе значений параметров системы. Устойчивое состояние, к которому стремится система, зависит от начальных условий, т.е. долгосрочная динамика системы, соответствующая одному из устойчивых состояний, определяется ее начальными условиями. При этом бассейны притяжения аттракторов мультистабильных систем могут иметь достаточно сложную геометрическую структуру, иногда даже фрактальную [6].

Следует отметить, что область сосуществования многих устойчивых состояний является критической, потому что малый шум или любое другое внешнее возмущение может приводить к переключению системы из одного устойчивого состояния в другое, что в свою очередь приводит к возникновению перемежающегося поведения, индуцированного шумом. Стоит подчеркнуть, что мультистабильные состояния являются вполне характерными для широкого круга реальных систем [5, 7]. При этом достаточно часто встречается ситуация, когда

реальные системы подвержены влиянию шумов и флуктуаций, которые могут быть как неотъемлемой составляющей динамики изучаемых систем, так и обусловленными внешними воздействиями [8, 9]. Таким образом, наличие мультистабильности в таких системах в сочетании с флуктуациями и шумами может приводить к тому, что мультистабильные системы могут стать метастабильными, поскольку шумы будут постоянно переводить систему из одного сосуществующего состояния в другое. Такое индуцированное шумом переключение между аттракторами будет приводить к возникновению перемежающегося поведения в реальных системах [10], причем такой тип поведения называется вполне типичным для мультистабильных систем [11].

Несмотря на значительный интерес со стороны исследователей к изучению мультистабильности и перемежаемости, в настоящий момент времени остается нерешенным вопрос, связанный с детальным пониманием процессов, происходящих в мультистабильных системах при воздействии на них шумов, и теоретическом описании возникающего при этом перемежающегося поведения. Важно отметить, что исследование данного типа перемежающегося поведения находит отражение во многих современных научных работах. В частности, в ряде работ показано, что перемежаемость, индуцированная шумом, может возникать в системах различной природы (в полупроводниковых лазерах [12], в легированном эрбием оптоволоконном

лазере [13], при мерцании квантовых точек [10], в сенсорных нейронах [14], в переходе Джозефсона [11]). Тем не менее, несмотря на большое количество работ, связанных с изучением влияния шумового воздействия на мультстабильные системы и попытками описать возникающую при этом перемежаемость, индуцированную шумом, в настоящий момент времени не существует общей теоретической модели, описывающей данный тип поведения. В связи с этим возникает достаточно важная задача, как с теоретической, так и практической точек зрения, направленная на создание общей теории, описывающей перемежающееся поведение в мультстабильных системах, находящихся под внешним шумовым воздействием.

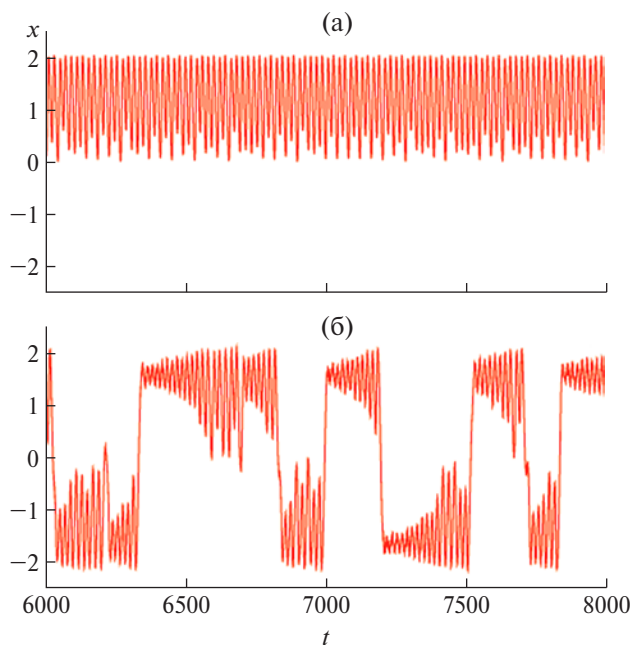
Настоящая работа направлена на исследование перемежающегося поведения, индуцированного шумом, которое возникает при внешнем шумовом воздействии, на примере модельных мультстабильных систем с потоковым временем. Получены статистические характеристики для данного типа поведения в таких системах, результаты численного моделирования сопоставлены с теоретическими закономерностями.

## БИСТАБИЛЬНЫЙ ГЕНЕРАТОР ЧУА

В качестве модельной системы с потоковым временем для исследований был выбран управляемый бистабильный генератор с хаотической динамикой, предложенный Л. Чуа [15]. Необходимо отметить, что для классической схемы генератора Чуа используется кусочно-линейная характеристика нелинейного элемента [15], однако в рамках настоящей работы была использована кубическая аппроксимация [16]. Уравнения, описывающие поведение бистабильного генератора Чуа с хаотической динамикой, имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= y - x - h(x) + D\xi, \\ \frac{dy}{dt} &= \left(\frac{1}{\alpha}\right)(x - y + z), \\ \frac{dz}{dt} &= -\delta(y + \rho z), \end{aligned} \quad (1)$$

где  $\xi(t)$  — случайный гауссовский процесс с нулевым средним и единичной дисперсией,  $D$  — интенсивность шумового воздействия, переменная  $x$  в этих уравнениях характеризует изменение напряжения на нелинейных элементах схемы, переменная  $y$  отвечает за изменение напряжения на конденсаторах в колебательных контурах, а переменная  $z$  характеризует изменение тока индуктивности [16]. Постоянные коэффициенты, которые



**Рис. 1.** Зависимость от времени изменения напряжения на нелинейном элементе схемы генератора Чуа: *a* — амплитуда шума  $D = 0$ ; *б* — амплитуда шума  $D = 1$ .

выражаются через параметры схемы, были выбраны следующими  $\alpha = 9$ ,  $\delta = 9$ . Параметр  $\rho$  отвечает за диссипацию, при этом данный параметр был выбран равным  $\rho = 0.01$ , так как при данном значении в исследуемой системе наблюдаются автономные колебания в одном из двух бассейнов притяжения, определяемых начальными условиями.

При численном исследовании системы уравнений (1) нелинейный элемент был представлен в виде кубической аппроксимации [16]:

$$h(x) = -1.25x + 0.1x^3. \quad (2)$$

Для интегрирования системы уравнений (1) использовался метод Рунге-Кутты четвертого порядка, адаптированный для стохастических дифференциальных уравнений [17] с шагом по времени  $\Delta t = 0.001$ . Как было отмечено ранее, параметры исследуемой системы были выбраны такими, что в зависимости от начальных условий изучаемый генератор демонстрирует автономные колебания в одном из двух бассейнов притяжения, т.е. в исследуемой системе существует два устойчивых положения равновесия. Рис. 1*a* иллюстрирует ситуацию, когда амплитуда внешнего шума равна нулю, а исследуемая система с течением времени остается вблизи одного из устойчивых положений равновесия. При этом при воздействии на данную систему внешнего шума с достаточно большим значением амплитуды будут осуществляться

последовательные переходы от одного устойчивого положения равновесия к другому. Иными словами, в данном случае в генераторе Чуа можно будет детектировать перемежающееся поведение, индуцированное шумом. Данную ситуацию иллюстрирует рис. 1б, на котором хорошо видно, как исследуемая система поочередно оказывается вблизи одного из двух устойчивых положений равновесия.

### ИССЛЕДОВАНИЕ ИНДУЦИРОВАННОЙ ШУМОМ ПЕРЕМЕЖАЕМОСТИ В БИСТАБИЛЬНОМ ГЕНЕРАТОРЕ ЧУА

Для данного типа перемежающегося поведения на основе решения уравнения Фоккера–Планка были получены теоретические зависимости для статистических характеристик, аналогично тому как это было сделано в работе [18], а именно распределение длительностей пребывания исследуемой системы вблизи того или иного устойчивого состояния

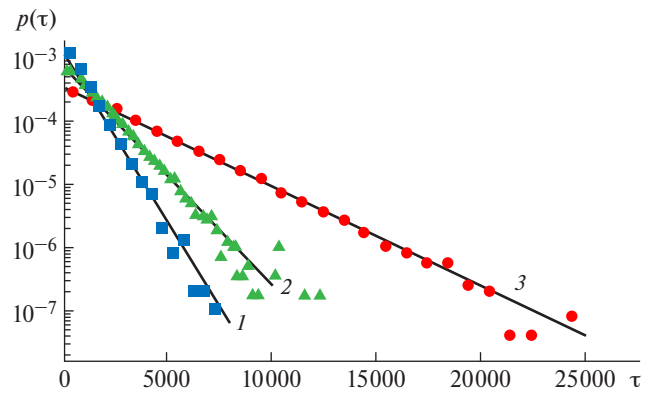
$$p(t) = \frac{1}{T} \exp\left(-\frac{t}{T}\right), \quad (3)$$

где  $T$  – это среднее время пребывания системы вблизи данного положения равновесия, а также зависимость средней длительности пребывания исследуемой системы вблизи того или иного устойчивого состояния от амплитуды внешнего шумового воздействия, которая определяется следующим выражением

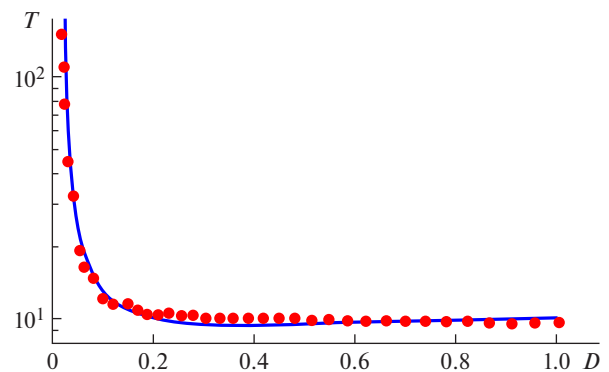
$$T = \frac{\pi}{4k} \exp\left(\frac{1}{4D}\right) \left[ I_{-1/4}\left(\frac{1}{4D}\right) + I_{1/4}\left(\frac{1}{4D}\right) \right], \quad (4)$$

где  $I_\alpha(x)$  – модифицированная функция Бесселя первого рода,  $k = \text{const}$ .

В рамках проведенных численных исследований индуцированной шумом перемежаемости в управляемом бистабильном генераторе Чуа, находящемся под внешним шумовым воздействием, были получены статистические характеристики для данного типа поведения. На рис. 2 представлены распределения длительностей пребывания исследуемой системы вблизи каждого из устойчивых состояний равновесия при фиксированных значениях управляющих параметров исследуемой системы. Результаты численного моделирования представлены точками, а линией показана аппроксимирующая теоретическая зависимость (3). Кроме того, для исследуемой системы была получена зависимость средней длительности пребывания исследуемой системы вблизи того или иного устойчивого состояния от амплитуды внешнего шумового воздействия, которая представлена на рис. 3. Так же, как и ранее, точками приведены результаты



**Рис. 2.** Распределения длительностей пребывания исследуемой системы (1) вблизи первого устойчивого положения равновесия и аналитическая зависимость (3), соответствующая этому распределению: 1 – амплитуда шума  $D = 0.26$ , 2 – амплитуда шума  $D = 0.32$ , 3 – амплитуда шума  $D = 0.37$ . Теоретическая кривая показана сплошной линией; данные, полученные численно – точками. Ось ординат показана в логарифмическом масштабе.



**Рис. 3.** Зависимость средней длительности пребывания исследуемой системы (1) вблизи того или иного устойчивого состояния от амплитуды внешнего шумового воздействия и аналитическая зависимость (4), соответствующая этой зависимости, при этом  $k = 0.318$ . Теоретическая кривая показана сплошной линией, данные, полученные численно, – точками. Ось ординат показана в логарифмическом масштабе.

численного моделирования, а линия соответствует теоретической зависимости (4). Из рис. 2 и рис. 3 видно, что теория, описывающая индуцированную шумом перемежаемость в мультистабильных системах, и численные результаты хорошо соотносятся друг с другом.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе проведено исследование индуцированной шумом перемежаемости в мультистабильных системах с потоковым временем на примере бистабильного генератора

Чуа с хаотической динамикой, находящегося под внешним шумовым воздействием. В работе установлено, что при внешнем шумовом воздействии на генератор Чуа при определенных значениях управляющих параметров можно наблюдать индуцированную шумом перемежаемость. В рамках выполненных исследований были получены статистические характеристики для данного типа поведения: распределения длительностей пребывания исследуемой системы вблизи каждого из сосуществующих устойчивых состояний и зависимость средней длительности пребывания исследуемой системы вблизи того или иного устойчивого состояния от амплитуды внешнего шумового воздействия. При этом на основе решения уравнения Фоккера–Планка были получены теоретические зависимости для статистических характеристик данного типа перемежаемости. Показано, что предложенные теоретические закономерности хорошо соотносятся с численными результатами.

Исследование выполнено при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 16-32-60078).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Maurer J., A. Libchaber* // J. Phys. Lett. 1980. V. 41. P. 515.
2. *Brun E. et al.* // Opt. Soc. Amer. 1985. V. 2. P. 156.
3. *Thompson J. M. T., Stewart H. B.* Nonlinear Dynamics and Chaos, Wiley, Chichester, 1986.
4. *Foss J. et al.* // Phys. Rev. Lett. 1996. V. 76 P. 708.
5. *Atteneave F.* // Sci. Am. 1971 V. 225. P. 63.
6. *Grebogi C. et al.* // Phys. Rev. Lett. 1983. V. 50. № 13. P. 935.
7. *Moon F. C., Li G.-X.* // Phys. Rev. Lett. 1985. V. 55. № 14. P. 1439.
8. *Arecchi F. T. et al.* // Phys. Rev. Lett. 1982. V. 49. P. 1217.
9. *Neiman A., Russell D. F.* // Phys. Rev. Lett. 2002. V. 88 P. 138103.
10. *Kuno M. et al.* // J. Chem. Phys. 2000. V. 112. P. 3117.
11. *Siddiqi I. et al.* // Phys. Rev. Lett. 2005. V. 94. P. 027005.
12. *Pedaci F. et al.* // Phys. Rev. E. 2005. V. 71. P. 36125.
13. *Pisarchik A. N.* // Phys. Rev. E. 2012. V. 86. P. 056219.
14. *Longtin A., Bulsara A., Moss F.* // Phys. Rev. Lett. 1991. V. 67. P. 656.
15. *Chua L. O. et al.* // IEEE Trans. 1986. V. CAS33. P. 1073.
16. *Кальянов Э. В.* // Письма ЖТФ. 2011. Т. 37. В. 22 С. 1.
17. *Никитин Н. Н. и др.* // Автоматика и телемеханика. 1975. Т. 4. С. 133.
18. *Runnova A. E. et al.* // Chaos, Solitons & Fractals. 2016. V. 93. P. 201.