

01

## Способ оценки нулевого условного показателя Ляпунова по временному ряду

© О.И. Москаленко, А.С. Павлов

Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского  
E-mail: moskalenko@nonlin.sgu.ru

Поступило в Редакцию 13 февраля 2014 г.

Предложен новый способ оценки нулевого условного показателя Ляпунова, справедливый как для систем, демонстрирующих периодическую динамику, в присутствии шума, так и связанных хаотических систем. Способ основан на анализе временной реализации исследуемой системы (зависимости разности фаз от времени) и позволяет достаточно точно оценить значение условного нулевого показателя Ляпунова в закритической области значений управляющего параметра. Основные результаты проиллюстрированы на примере систем, демонстрирующих периодическую динамику в присутствии шума.

Показатели Ляпунова представляют собой мощный инструмент анализа сложного поведения систем [1–4]. Они используются, в частности, для идентификации перехода между различными режимами (например, от периодических или квазипериодических колебаний к хаотическим [5], от хаотических — к гиперхаотическим [6]), для выявления наличия гиперболического аттрактора [3,7], а также для диагностики различных типов синхронизации (см., например, [8–12]).

Известно, что неавтономная система, демонстрирующая периодическую динамику, характеризуется наличием нулевого старшего показателя Ляпунова. С увеличением параметра связи (амплитуды внешнего воздействия) этот показатель Ляпунова переходит в область отрицательных значений, что соответствует установлению синхронизации в исследуемой системе при  $A = A_c$  [13]. В случае воздействия дополнительного источника шума на подобную систему нулевой показатель Ляпунова становится отрицательным еще до момента установления синхронизации, а его зависимость от параметра надкритичности ( $A - A_c$ )

подчиняется соотношению

$$\Lambda_0(\varepsilon) = \begin{cases} -\frac{a_1}{|A - A_c|}, & A < A_c, \\ f \ln |1 - a_2 \sqrt{A - A_c}|, & A > A_c, \end{cases} \quad (1)$$

где  $f$  — частота внешнего сигнала,  $a_1, a_2$  — постоянные, определяемые системой [13]. Аналогичная закономерность характерна и для нулевого условного показателя Ляпунова ряда систем, демонстрирующих хаотическую динамику (например, однонаправлено связанных осцилляторов Ресслера). В то же время для некоторых систем (например, тех же осцилляторов Ресслера, находящихся под внешним гармоническим воздействием) такая закономерность оказывается несправедливой.

В данной работе предлагается универсальный способ оценки величины условного нулевого показателя Ляпунова по временному ряду, справедливый как для систем, демонстрирующих периодическую динамику, в присутствии шума, так и связанных хаотических систем. Для неавтономных периодических осцилляторов его результаты практически не отличаются от результатов алгоритма Беннеттина [5], однако для связанных хаотических систем он позволяет определить величину именно нулевого показателя Ляпунова в закритической области значений управляющего параметра ( $A > A_c$ ), в то время как алгоритм Беннеттина дает величину старшего (т.е. положительного) ляпуновского показателя.

Проиллюстрируем суть предлагаемого метода на примере квадратичного отображения, находящегося под действием шума:

$$x_{n+1} = f(x_n) + \xi_n = x_n + \Omega x_n^2 - \varepsilon + \xi_n, \quad (2)$$

где  $\xi_n$  — дельта-коррелированный гауссов шум [ $\langle \xi_n \rangle = 0$ ,  $\langle \xi_n \xi_m \rangle = D \delta(n - m)$ ],  $\Omega$  и  $\varepsilon$  — управляющие параметры,  $D$  — дисперсия шума. В исходной системе в отсутствие шума при  $\varepsilon_c = 0$  происходит касательная бифуркация, в результате которой изначально нулевой показатель Ляпунова переходит в отрицательную область. Выберем значения управляющих параметров  $\Omega = 0.1$  и  $\varepsilon = 0.008$ ,  $D = 0.0001$  (что соответствует закритической области  $\varepsilon > \varepsilon_c$ ) и оценим поведение этого показателя Ляпунова в данном случае.

Как было показано в работе [13], показатель Ляпунова такой системы может быть найден по формуле

$$\Lambda_0(\varepsilon) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln |f'(x_i)|, \quad (3)$$

где  $x_n$  — временная реализация исследуемой системы (2),  $f'(x) = 1 + 2\Omega x$  — производная от оператора эволюции, вычисленная аналитически.

Принимая во внимание эргодичность рассматриваемого процесса и наличие реинжекции, усреднение по времени может быть заменено на усреднение по ансамблю. Тогда

$$\Lambda_0(\varepsilon) = \int_{-\infty}^{\infty} \rho_i(x) \ln |f'(x)| dx, \quad (4)$$

где  $\rho_i(x)$  — плотность распределения переменной  $x$ . Известно, что в закритической области значений управляющего параметра плотность вероятности подчиняется соотношению

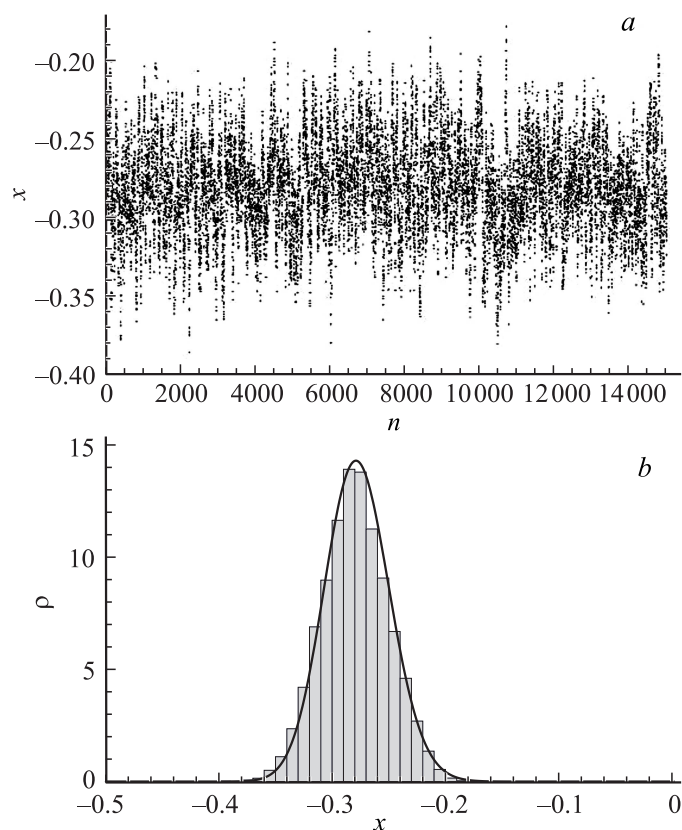
$$\rho(x) = A \exp \left[ -\frac{2}{D} \left( \varepsilon x - \frac{\Omega x^3}{3} \right) \right] \quad (5)$$

(более детально см. [14]), где  $A$  — нормировочный коэффициент,  $D$  — дисперсия шума. Следовательно, значения параметров  $\Omega$  и  $\varepsilon$  могут быть найдены путем аппроксимации численно полученного распределения закономерностью (5). Тогда нулевой показатель Ляпунова может быть вычислен по формуле

$$\Lambda_0(\varepsilon) = \int_{x_1}^{x_2} \rho(x) \ln |1 + 2\Omega x| dx, \quad (6)$$

при этом значения  $x_1$  и  $x_2$  определяются эмпирически из вида  $\rho(x)$ .

Работоспособность предлагаемого метода иллюстрирует рис. 1. Здесь приведены временная реализация  $x_n$  системы (2) при вышеуказанных значениях управляющих параметров ( $a$ ), плотность распределения вероятности  $\rho(x)$ , полученная по временной реализации  $x_n$ , а также



**Рис. 1.** Временная реализация квадратичного отображения (2) при  $\Omega = 0.1$ ,  $\varepsilon = 0.008$ ,  $D = 0.0001$  (a), плотность распределения вероятности  $\rho(x)$  (гистограмма), полученная по временной реализации  $x_n$ , и ее аппроксимация законом (5) при  $A = 1.07 \cdot 10^{-13}$ ,  $\Omega = 0.111124$ ,  $\varepsilon = 0.0087$ ,  $D = 0.0001$  (сплошная линия) (b).

ее аппроксимация законом (5) при  $A = 1.07 \cdot 10^{-13}$ ,  $\Omega = 0.111124$ ,  $\varepsilon = 0.0087$ ,  $D = 0.0001$  (b). Значения управляющих параметров определялись следующим образом. Параметр  $D$  вычислялся как коэффициент эффективной диффузии фазы, согласно методике, изложенной в [15].

Соотношение между параметрами  $A$ ,  $\Omega$  и  $\varepsilon$  находилось из условия совпадения максимумов численно полученной плотности распределения вероятности и закономерности (5), в результате чего установлено, что  $\varepsilon = 0.0784 \Omega$ ,  $A = 14.2987 \exp(-292.693 \Omega)$ . Поиск значения параметра  $\Omega$  осуществлялся методом наименьших квадратов. Таким образом, получены следующие значения параметров:  $\Omega = 0.111124$ ,  $\varepsilon = 0.0087$ ,  $A = 1.07 \cdot 10^{-13}$ . Нетрудно заметить, что они близки к исходным значениям параметров  $\Omega$  и  $\varepsilon$ . Подставляя эти значения в выражение (6) и выбирая  $x_1 = -0.5$ ,  $x_2 = 0$ , получаем значение  $\Lambda_0 = -0.065$ , что хорошо согласуется со значением нулевого показателя Ляпунова, вычисленного при помощи алгоритма Бенеттина [5].

Применим предложенную методику к другим системам, находящимся под действием шума. В качестве примеров таких систем выберем систему с дискретным временем — отображение окружности на себя

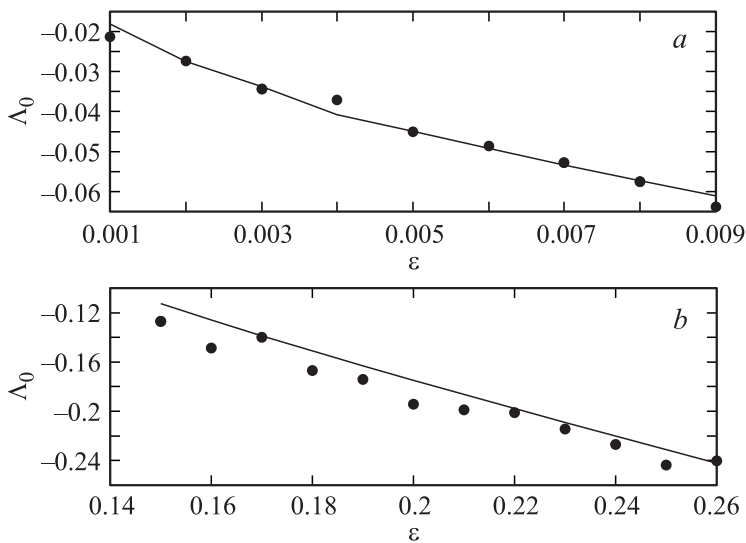
$$x_{n+1} = x_n + 2\Omega(1 - \cos x_n) - \varepsilon + \xi_n, \quad \text{mod } 2\pi \quad (7)$$

при  $\Omega = 0.1$  и систему с непрерывным временем — уравнение Адлера

$$\frac{dx}{dt} = -\Delta + \varepsilon \sin x + \xi \quad (8)$$

при  $\Delta = 0.1$ ,  $D = 1$ . Характеристики шумового сигнала выберем теми же, что и в случае квадратичного отображения, рассмотренного выше. Рис. 2 иллюстрирует зависимости нулевого показателя Ляпунова от параметра  $\varepsilon$  для обеих систем. Точками показаны данные, полученные при помощи предложенного метода, сплошными линиями — результаты расчета показателей Ляпунова при помощи алгоритма Бенеттина. Видно хорошее соответствие результатов обоих методов.

Таким образом, в работе предложен метод оценки нулевого показателя Ляпунова по временному ряду. Апробация метода проведена на примере модельных одномерных систем с непрерывным и дискретным временем (отображение окружности на себя, уравнение Адлера), находящихся под действием шума. Показана эффективность метода в закритической области значений управляющего параметра. Можно ожидать, что указанный метод будет также работать корректно, если его применить для расчета условного нулевого показателя Ляпунова неавтономных и связанных систем, демонстрирующих хаотическую или периодическую динамику (в присутствии шума), что говорит



**Рис. 2.** Зависимости нулевого показателя Ляпунова от параметра надкритичности  $\varepsilon$  для отображения окружности (7) при  $\Omega = 0.1$  (a) и уравнения Адлера (8) при  $\Delta = 0.1$  (b) в присутствии шума. Данные, полученные при помощи предложенного метода, показаны точками; результаты применения алгоритма Беннеттина — сплошными линиями.

об его универсальности. Метод может быть использован также для определения степени синхронности по временным рядам, порождаемым системами различной природы.

Авторы выражают благодарность профессору А.А. Короновскому за полезные замечания и обсуждения.

Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации в рамках задания № 2014/202 на выполнение государственных работ в сфере научной деятельности (СГТУ-141), Совета по грантам президента Российской Федерации для государственной поддержки молодых российских ученых — кандидатов наук (проект МК-807.2014.2) и Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 12-02-00221-а, 14-02-31088-мол-а).

**Список литературы**

- [1] *Dunki R.M.* // Phys. Rev. E. 2000. V. 62 (5). P. 6505–6515.
- [2] *Porcher R., Thomas G.* // Phys. Rev. E. 2001. V. 64 (1). P. 010 902(R).
- [3] *Thamilmaran K., Senthikumar D.V., Venkatesan A., Lakshmanan M.* // Phys. Rev. E. 2006. V. 74. P. 036 205.
- [4] *Hramov A.E., Koronovskii A.A., Maksimenko V.A., Moskalenko O.I.* // Physics of Plasmas. 2012. V. 19 (8). P. 082 302.
- [5] *Кузнецов С.П.* Динамический хаос. М.: Физматлит, 2001.
- [6] *Кузнецов С.П., Трубецков Д.И.* // Изв. вузов. Радиофизика. 2004. Т. XLVII (5–6). С. 383–397.
- [7] *Kuznetsov S.P.* // Phys. Rev. Lett. 2005. V. 95. P. 144 101.
- [8] *Pyragas K.* // Phys. Rev. E. 1996. V. 54 (5). P. R4508–R4511.
- [9] *Hramov A.E., Koronovskii A.A.* // Phys. Rev. E. 2005. V. 71 (6). P. 067 201.
- [10] *Goldobin D.S., Pikovsky A.S.* // Phys. Rev. E. 2005. V. 71 (4). P. 045 201(R).
- [11] *Goldobin D.S., Pikovsky A.S.* // Physica A. 2005. V. 351. P. 126–132.
- [12] *Hramov A.E., Koronovskii A.A., Moskalenko O.I.* // Phys. Lett. A. 2006. V. 354 (5–6). P. 423–427.
- [13] *Hramov A.E., Koronovskii A.A., Kurovskaya M.K.* // Phys. Rev. E. 2008. V. 78. P. 036 212.
- [14] *Hramov A.E., Koronovskii A.A., Kurovskaya M.K., Ovchinnikov A.A., Boccaletti S.* // Phys. Rev. E. 2007. V. 76(2). P. 026 206.
- [15] *Захарова А.С., Вадивасова Т.Е., Анищенко В.С.* // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2006. Т. 14 (5). С. 44–61.