

УДК 530.182

**Д.И. Данилов, М.О. Журавлев, А.В. Иванов, А.А. Короновский,
М.К. Куровская, О.И. Москаленко, А.О. Сельский, С.А. Шурыгина**

**ИССЛЕДОВАНИЕ ХАРАКТЕРИСТИК ПЕРЕМЕЖАЮЩЕГОСЯ ПОВЕДЕНИЯ ВБЛИЗИ
ГРАНИЦЫ СИНХРОННОГО РЕЖИМА ПРИ ИЗМЕНЕНИИ УПРАВЛЯЮЩЕГО ПАРАМЕТРА**

Исследуются характеристики перемежающегося поведения, наблюдающегося вблизи границы синхронизации осциллятора Ван дер Поля под внешним гармоническим воздействием в случае, когда амплитуда внешнего сигнала изменяет свое значение случайным образом через некоторые интервалы времени.

Хаотическая синхронизация, перемежаемость, хаотический осциллятор

**D.I. Danilov, M.O. Zhuravlev, A.V. Ivanov, A.A. Koronovsky,
M.K. Kurovskaya, O.I. Moskalenko, A.O. Selskii, S.A. Shurygina**

**RESEARCH INTO THE CHARACTERISTICS OF INTERMITTENT BEHAVIOR
NEAR THE SYNCHRONIZATION BOUNDARY FOR THE VARYING CONTROL PARAMETER**

Characteristics of intermittent behavior near the synchronization boundary are studied for the Van der Pole oscillator under the external harmonic signal where the amplitude is changed randomly at the given time intervals.

Chaotic synchronization, intermittency, chaotic oscillator

Явление перемежаемости широко встречается в природе и весьма активно изучается исследователями. Одной из важных особенностей перемежаемости является ее фундаментальный характер, приводящий к тому, что явление перемежающегося поведения наблюдается в системах самой различной природы. Известно, что перемежаемость является одним из классических сценариев перехода от периодических колебаний к хаотическим [1, 2]. На сегодняшний день существует определенная классификация перемежающегося поведения, в частности, выделяют перемежаемость типов I-III [1-3], on-off перемежаемость [4, 5], перемежаемость кольца [6], перемежаемость «игольного ушка» [7], тесно связанную с перемежаемостью типа I в присутствии шума [8].

Как правило, в подавляющем большинстве случаев перемежающееся поведение, наблюдающееся в той или иной системе, рассматривается при фиксированных во времени (стационарных) значениях управляющих параметров. Однако, вполне возможны ситуации, когда параметры системы, демонстрирующей перемежающееся поведение, будут изменяться с течением времени. В частности, подобная ситуация может быть характерна для живых систем. Например, известно, что перемежающееся поведение наблюдается вблизи границы возникновения режимов хаотической синхронизации [9]. Известно также, что режимы хаотической синхронизации (например, фазовой хаотической синхронизации) имеют место в живых системах, например, в кардиоваскулярной системе человека [10]. Очевидно, что на границе установления синхронного режима будет наблюдаться перемежающееся поведение, при этом на его характеристики будет оказывать существенное влияние изменение управляющих параметров системы с течением времени, присущее живым системам.

В настоящей работе рассматривается вопрос о характеристиках перемежающегося поведения осциллятора вблизи границы синхронного режима, если один из управляющих параметров системы будет менять свое значение случайным образом через некоторые промежутки времени. Пусть A – управляющий параметр, A_c – значение этого управляющего параметра, соответствующее границе установления синхронного режима. Будем считать, что при $A > A_c$ в системе наблюдается синхронная динамика, а при $A < A_c$ – асинхронное поведение, демонстрирующее черты перемежаемости. Предположим, что значение управляющего параметра находится вблизи критической точки A_c и подвержено случайным флуктуациям с течением времени, причем в разные моменты времени величина A может быть как выше, так и ниже критического значения A_c .

В качестве исследуемой системы был выбран осциллятор Ван дер Поля, находящимся под внешним гармоническим воздействием, амплитуда которого A изменялась случайным образом:

$$\ddot{x} - (\lambda - x^2)\dot{x} + x = (A_0 + D\xi)\sin(\omega_e t), \quad (1)$$

где A и ω_e – амплитуда и частота внешнего гармонического воздействия, соответственно, λ – параметр нелинейности, D – величина, характеризующая интенсивность флуктуаций, ξ – случайная величина, характеризующаяся нормальным законом распределения

$$p(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\xi} \exp\left(-\frac{\xi^2}{2\sigma_\xi^2}\right), \quad (2)$$

где $\sigma_\xi^2 = 1$. Значения указанных выше параметров были выбраны фиксированными: $\lambda = 0.1$, $\omega_e = 0.98$, $A_0 = 0.024$, что больше граничного значения $A_c = 0.0238$, соответствующего порогу синхронизации в отсутствие случайной добавки $D\xi$.

В качестве упрощающего предположения будем считать, что амплитуда внешнего воздействия изменяет свое значение случайным образом через фиксированные (равные) интервалы времени. Параметр, отвечающий за интенсивность флуктуаций $D = 5 \cdot 10^{-4}$, величина ξ , а соответственно и величина $A = A_0 + D\xi$, отвечающая за амплитуду внешнего воздействия, принимала новое значение через интервал времени $\tau_\xi = 900$. Очевидно, для плотности распределения вероятности $p(A)$ величины A можно записать

$$p(A) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(A - A_0)^2}{2\sigma^2}\right), \quad (3)$$

при этом $\sigma = D\sigma_\xi = 5 \cdot 10^{-4}$, $\mu = A_0 = 0.024$.

Рассмотрим, что происходит в системе между флуктуациями управляющего параметра A с точки зрения возникновения фазовых проскоков, соответствующих возникновению турбулентных участков поведения. Очевидно, что в случае, когда $A > A_c$, система оказывается в синхронизованном состоянии, и, как следствие, в этот интервал времени длительностью τ_ξ фазовых проскоков не возникает и рассматриваемый интервал времени полностью принадлежит участку ламинарной (синхронной) динамики. Ситуация оказывается сложнее, если в результате флуктуации управляющий параметр A принял значение, меньшее A_c . Хорошо известно, что в случае малой расстройки параметров при постоянном значении параметра A ниже границы синхронизации наблюдается поведение, демонстрирующее черты перемежаемости типа I, при этом зависимость средней длительности ламинарных участков поведения (участков синхронной динамики) для данного типа перемежающегося поведения имеет вид

$$T(A) = C_1 \cdot (A_c - A)^{-1/2}, \quad (4)$$

где C_1 – некоторая константа. В рассматриваемом случае для указанных значений управляющих параметров, $C_1 \approx 26$. Очевидно, что если средняя длительность $T(A)$ участка ламинарного поведения оказывается существенно меньше длительности интервала времени τ_ξ , в течение которого

значение управляющего параметра A остается неизменным, то с вероятностью почти на верное в системе будет наблюдаться фазовый проскок, соответствующий окончанию участка ламинарного (синхронного) поведения. Введем в рассмотрение значение A_* , которое соответствует такому значению параметра A , при котором средняя длительность ламинарной фазы $T(A_*) = \tau_\xi$. Из соотношения (4) нетрудно получить, что

$$A_* = A_c - (C_1/\tau_\xi)^2. \quad (5)$$

Таким образом, если $\tau_\xi = 900$, то $A_* = 0.023$. Нетрудно заметить, что при всех $A < A_*$, $T(A) < \tau_\xi$, и, следовательно, можно считать, что до смены значения параметра A в рассматриваемой системе с вероятностью, близкой к единице, произойдет фазовый проскок. В том же случае, когда значение управляющего параметра оказывается в диапазоне $A_* < A < A_c$, вероятность фазового проскока может быть оценена как $\tau_\xi/T(A)$. Таким образом, для вероятности наблюдения фазового проскока в течение интервала времени между флуктуациями значения управляющего параметра A можно записать

$$P(A) = \begin{cases} 1, & A < A_*, \\ \frac{\tau_\xi}{T(A)}, & A_* < A < A_c, \\ 0 & A > A_c. \end{cases} \quad (6)$$

На рис. 1 представлено распределение величины управляющего параметра A для рассматриваемой системы (кривая 1), полученное в результате численного моделирования системы (1). Одновременно на этом же рисунке показано распределение значений того же самого параметра A , при котором наблюдался фазовый проскок (кривая 2). Оба распределения получены для одного и того же временного ряда по всем значениям, которые принимал параметр A за время наблюдения. На рисунке также показаны стрелками значения A_* и A_c , играющие важную роль в формировании распределения плотности вероятности фазового проскока в рассматриваемой системе. Из рисунка отчетливо видно, что для значений параметра $A \leq A_*$ оба распределения совпадают друг с другом, что говорит о том, что для данных значений управляющего параметра в 100% случаев происходил фазовый проскок, то есть в системе начинался турбулентный участок поведения, и, соответственно, вероятность фазового проскока в данном случае равняется единице, в полном соответствии с соотношением (6). Точно так же наблюдается полное соответствие результатов численного моделирования для случаев, когда $A > A_c$ – в этой ситуации фазовые проскоки практически отсутствуют, что говорит о том, что для значений параметра, принимающих в ходе флуктуаций значения больше порога установления синхронного режима, вероятность возникновения фазового проскока равняется нулю. Наконец, видно, что в диапазоне значений $A_* < A < A_c$ с ростом значения A количество фазовых проскоков уменьшается, что говорит об уменьшении вероятности P . Для сопоставления поведения вероятности P возникновения фазовых проскоков, полученной численно, с аналитической зависимостью (6) в диапазоне $A_* < A < A_c$, на рисунке приведена также зависимость $p(A)\Delta A P(A)$, показанная пунктирной линией (ΔA – диапазон агрегации представления данных). Как видно из рисунка, и в этом диапазоне значений параметра A соотношение (6) хорошо описывает процессы, происходящие в анализируемой системе.

С учетом всего вышеизложенного, можно говорить о том, что при рассмотрении динамики системы (1) в интервале времени τ_ξ между флуктуациями значения параметра A вероятность наблюдать уход фазы будет определяться соотношением

$$P_1 = \int_0^\infty p(A)P(A)dA = \int_0^{A_*} p(A)dA + \int_{A_*}^{A_c} \frac{\tau_\xi p(A)}{T(A)} dA. \quad (7)$$

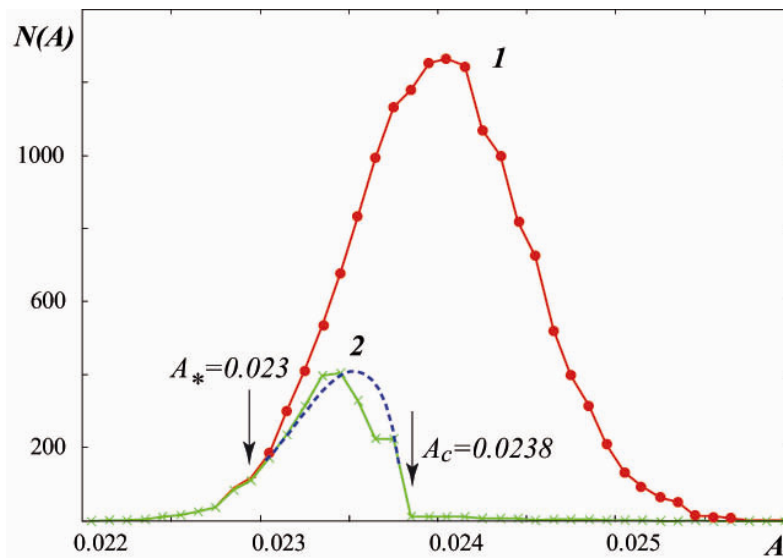


Рис. 1: Плотность распределения вероятности $p(A)$ значений параметра A для системы (1).

Распределение 1 построено по всем значениям, которые принимал параметр A за время наблюдения, распределение 2 получено для значений параметра A , при которых наблюдался фазовый проскок.

Обе зависимости получены для одного и того же временного ряда по всем значениям, которые принимал параметр A за время наблюдения. Штриховой линией показана зависимость $p(A)\Delta P(A)$

Тогда вероятность того, что в системе реализуется ламинарная фаза длительностью s , соответствующей k интервалам флуктуаций параметра A (иными словами, $s = k\tau_\xi$), будет определяться как

$$P_2(k) = (1 - P_1)^{k-1} \cdot P_1^2, \tag{8}$$

где вероятность P_1 определяется соотношением (7). Соответственно, распределение длительностей ламинарных участков поведения, характеризующихся синхронной динамикой во времени, в этом случае будет подчиняться закону

$$N(s) \sim (1 - P_1)^{s/\tau_\xi - 1} \cdot P_1^2, \tag{9}$$

и, соответственно, данное соотношение может быть переписано в виде

$$N(s) = C_2 \exp(\kappa s), \tag{10}$$

где

$$\kappa = (1/\tau_\xi) \ln(1 - P_1), \tag{11}$$

C_2 – коэффициент пропорциональности, являющийся нормировочным множителем, обеспечивающим выполнение условия нормировки. Таким образом, следует ожидать, что в случае медленных флуктуаций управляющего параметра A распределение длительностей ламинарных фаз в рассматриваемой системе будет подчиняться экспоненциальному закону (10). В случае, если распределение длительностей ламинарных участков поведения строить для длительностей ламинарных фаз, нормированных на интервал времени τ_ξ , показатель степени κ в соотношении (10) будет определяться исключительно величиной вероятности наблюдать уход фазы за интервал времени между флуктуациями управляющего параметра A :

$$\kappa = \ln(1 - P_1). \tag{12}$$

На рис. 2 приведены распределения длительностей ламинарных фаз, полученные в результате численного моделирования рассматриваемой системы при указанных выше значениях параметров, для различных значений интервала τ_ξ , в течение которого управляющий параметр A считается неизменным. Для сопоставления с теоретическими данными на рисунке приведены также зависимости, соответствующие аналитическому соотношению (9), значения величины P_1 для которых определялись с помощью соотношения (7). Точки на графике соответствуют данным,

полученным численно, сплошными линиями показана зависимость (9) для каждого конкретного значения τ_ξ . Нетрудно видеть хорошее соответствие численных данных и теоретического соотношения, независимо от величины интервала времени τ_ξ , по истечении которого происходило изменение значения параметра A , моделирующее медленную флуктуацию данного параметра.

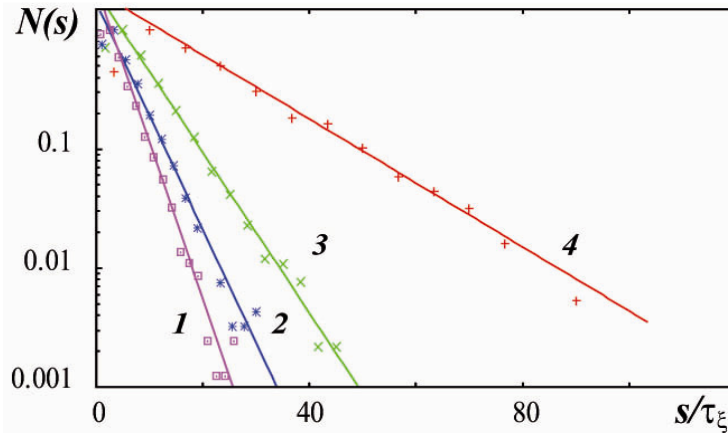


Рис. 2: Распределения длительностей ламинарных фаз для системы (1), полученные при различных значениях τ_ξ . Точки на графике соответствуют численным данным, аналитическое

соотношение (9) показано сплошной линией. Значения интервала времени τ_ξ и вероятности P_1 , соответствующие каждому конкретному распределению следующие:

$$1 - \tau_\xi = 1200, P_1 = 0.247 ; 2 - \tau_\xi = 900, P_1 = 0.197 ; 3 - \tau_\xi = 600, P_1 = 0.133 ;$$

4 - $\tau_\xi = 300, P_1 = 0.066$. Значения по оси ординат отложены в логарифмическом масштабе, чтобы показать экспоненциальный характер распределения длительностей участков ламинарного поведения

Таким образом, в настоящей работе исследованы характеристики перемежающегося поведения, наблюдающегося близи границы синхронизации осциллятора ван дер Поля, находящегося под внешним гармоническим воздействием в случае, когда амплитуда этого воздействия изменяла свое значение случайным образом через фиксированные интервалы времени. Был установлен аналитический закон для распределения длительностей ламинарных участков поведения и показано хорошее соответствие выявленной теоретической зависимости с данными, полученными в ходе численного моделирования системы при различных значениях интервала времени, через который происходила смена значения управляющего параметра.

Исследование выполнено при поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации (соглашения 14.В37.21.0569 и 14.В37.21.0751) и Фонда некоммерческих программ «Династия».

ЛИТЕРАТУРА

1. Berge P. L'ordre dans le chaos / P. Berge, Y. Pomeau, and Ch. Vidal Hermann, Paris, 1988.
2. Берже П. Порядок в хаосе / П. Берже, И. Помо, К. Видаль. М.: Мир, 1991.
3. Dubois M. Experimental evidence of intermiasttencies associated with a subharmonic bifurcation / M. Dubois, M. Rubio, P. Berge // Phys. Rev. Lett. 1983. V 51. P. 1446-1449.
4. Platt N. On-off intermittency: a mechanism for bursting / N. Platt, E. A. Spiegel, and C. Tresser // Phys. Rev. Lett. 1993. V. 70. P. 279-282.
5. Heagy J. F. Characterization of on-off intermittency / J.F. Heagy, N. Platt, S.M. Hammel // Phys. Rev. E. 1994. V. 49. P. 1140-1150.
6. Hramov A. E. Ring intermittency in coupled chaotic oscillators at the boundary of phase synchronization / A.E. Hramov, A.A. Koronovskii, M.K. Kurovskaya, S. Boccaletti // Phys. Rev. Lett. 2006. V. 97. P. 114101.
7. Pikovsky A.S. Attractor-repeller collision and eyelet intermittency at the transition to phase synchronization / A.S. Pikovsky, G.V. Osipov, M.G. Rosenblum, M. Zaks, J. Kurths // Phys. Rev. Lett. 1997. V. 79. P. 47-50.
8. Hramov A.E. Type-I intermittency with noise versus eyelet intermittency / A.E. Hramov, A.A. Koronovskii, M.K. Kurovskaya, O.I. Moskalenko // Phys. Lett. A. 2011. V. 375. P. 1646-1652.

9. Rosenblum M.G. From phase to lag synchronization in coupled chaotic oscillators / M.G. Rosenblum, A.S. Pikovsky, J. Kurths // Phys. Rev. Lett. 1997. V. 78. P. 4193-4196.

10. Hramov A.E. Detecting synchronization of self-sustained oscillators by external driving with varying frequency / A.E. Hramov, A.A. Koronovskii, V.I. Ponomarenko, M.D. Prokhorov // Phys. Rev. E. 2006. V. 73. P. 026208.

Данилов Дмитрий Игоревич – аспирант кафедры «Физика открытых систем» факультета нелинейных процессов Саратовского государственного университета имени Н.Г. Чернышевского

Журавлев Максим Олегович – младший научный сотрудник научно-образовательного центра «Нелинейная динамика сложных систем» Саратовского государственного технического университета имени Гагарина Ю.А.

Иванов Алексей Викторович – кандидат геолого-минералогических наук, профессор, заведующий кафедрой «Геоэкология и инженерная геоэкология» декан факультета экологии и сервиса Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А.

Короновский Алексей Александрович – доктор физико-математических наук, профессор, ведущий научный сотрудник научно-образовательного центра «Нелинейная динамика сложных систем» Саратовского государственного технического университета имени Гагарина Ю.А.

Куровская Мария Константиновна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры «Нелинейная физика» Саратовского государственного университета имени Н.Г. Чернышевского

Москаленко Ольга Игоревна – кандидат физико-математических наук, доцент, старший научный сотрудник научно-образовательного центра «Нелинейная динамика сложных систем» Саратовского государственного технического университета имени Гагарина Ю.А.

Сельский Антон Олегович – младший научный сотрудник научно-образовательного центра «Нелинейная динамика сложных систем» Саратовского государственного технического университета имени Гагарина Ю.А.

Шурыгина Светлана Андреевна – младший научный сотрудник научно-образовательного центра «Нелинейная динамика сложных систем» Саратовского государственного технического университета имени Гагарина Ю.А.

Dmitry I. Danilov – Postgraduate
Department of Physics of Open Systems,
Gagarin Saratov State University

Maxim O. Zhuravlev – Junior Researcher
Scientific and Education Center
«Nonlinear Dynamics of Complex Systems»,
Gagarin Saratov State Technical University

Alexey V. Ivanov – Ph. D., Professor
Head: Department of Geoecology
and Engineering Geoecology,
Dean: Faculty of Ecology and Service,
Gagarin Saratov State Technical University

Alexey A. Koronovsky – Dr. Sc., Professor, Leading Scientific Researcher:
Scientific and Education Center
«Nonlinear Dynamics of Complex Systems»,
Gagarin Saratov State Technical University

Maria K. Kurovskaya – Ph. D., Associate Professor
Department of Nonlinear Physics,
Faculty of Nonlinear Processes,
Chernyshevsky Saratov State University

Olga I. Moskalenko – Ph. D., Associate Professor,
Senior Researcher:
Scientific and Education Center
«Nonlinear Dynamics of Complex Systems»,
Gagarin Saratov State Technical University

Anton O. Selsky – Junior Researcher:
Scientific and Education Center
«Nonlinear Dynamics of Complex Systems»,
Gagarin Saratov State Technical University

Svetlana A. Shurygina – Junior Researcher:
Scientific and Education Center
«Nonlinear Dynamics of Complex Systems»,
Gagarin Saratov State Technical University