

УДК 517.9

**МЕТОД ВЫДЕЛЕНИЯ ЛАМИНАРНЫХ УЧАСТКОВ ПОВЕДЕНИЯ
В ХАОТИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ, В КОТОРЫХ ОДНОВРЕМЕННО
РЕАЛИЗУЕТСЯ ДВА РАЗЛИЧНЫХ ТИПА ПЕРЕМЕЖАЕМОСТИ**© 2013 г. *М.О. Журавлев, А.А. Короновский, О.И. Москаленко, А.Е. Храмов*

Саратовский госуниверситет им. Н.Г. Чернышевского

zhuravlevmo@gmail.com

Поступила в редакцию 30.11.2012

Предложен новый метод выделения ламинарных фаз временных реализаций связанных хаотических систем, в которых одновременно сосуществуют два различных типа перемежающегося поведения. Отличительной чертой предложенного метода является его способность соотносить фазовый проскок с типом перемежаемости, которому проскок соответствует, при этом он позволяет точно определять момент начала и конец ламинарного поведения. Стоит отметить, что указанный метод имеет также ряд преимуществ: это простота его реализации и малое время счета.

Ключевые слова: синхронизация, перемежаемость, временной масштаб.

Наличие перемежаемости характерно для многих нелинейных систем и наблюдается, в частности, при переходе от периодических колебаний к хаотическим [1], а также вблизи границы возникновения различных режимов хаотической синхронизации связанных осцилляторов [2–5].

Существует определенная классификация перемежающегося поведения, в частности, выделяют перемежаемость типов I–III [1, 6], on-off перемежаемость [7], перемежаемость игольного ушка [8], перемежаемость кольца [9]. Несмотря на некоторое сходство (наличие во временном ряду двух различных режимов, чередующихся друг с другом), каждый тип перемежаемости обладает своими собственными особенностями и характеристиками (прежде всего, это зависимость средней длительности ламинарных фаз от управляющего параметра и распределение длительностей ламинарных фаз). Механизмы, приводящие к возникновению перемежающегося поведения каждого типа, также различны.

Кроме вышеперечисленных типов перемежаемости, возможно более сложное поведение системы, в котором она одновременно демонстрирует два различных типа перемежаемости. Такой тип поведения был назван «перемежаемость перемежаемостей». Этот тип перемежающегося поведения может существовать как в системе однонаправленно связанных хаотических осцилляторов, так и в осцилляторе, находящемся под внешним воздействием, в состоянии, предшествующем режиму синхронизации.

При этом исследуемую систему можно рассматривать на различных временных масштабах, вводимых с помощью непрерывного вейвлетного преобразования [10–12], в том числе и на временных масштабах, отличных от основного. Как показали результаты предварительных исследований, для системы однонаправленно связанных осцилляторов (рассмотрение проводилось на примере систем Ресслера) в определенном диапазоне значений временных масштабов действительно сосуществуют два различных типа перемежаемости, а именно, перемежаемость кольца и перемежаемость игольного ушка.

Необходимо отметить, что «перемежаемость перемежаемостей» является слабо изученным типом поведения, в связи с чем изучение его представляет большой интерес с фундаментальной точки зрения, так как эти исследования позволяют более глубоко понять и осмыслить механизмы и природу таких явлений, как перемежаемость и хаотическая синхронизация.

При исследовании любого типа перемежаемости важной проблемой является задача о выделении в сигналах временных интервалов, соответствующих различным типам динамики систем, демонстрирующих перемежающееся поведение (задача о диагностике ламинарных и турбулентных фаз). Однако ни один из существующих в настоящее время методов выделения ламинарных и турбулентных фаз поведения не может быть применен при исследовании хаотических систем, в которых наблюдается не

один тип перемежаемости, а два и более.

Учитывая вышеописанное, для изучения систем, в которых реализуются поочередно два типа перемежаемости, необходимо разработать метод, позволяющий выделять различные участки перемежающегося поведения, соотнося их с определенным типом перемежаемости, который в данный момент реализуется в исследуемой системе. Наиболее рациональным решением этой задачи была бы модернизация уже существующего метода выделения перемежающихся участков поведения. Стоит отметить, что метод, на основе которого будет реализован способ выделения ламинарных и турбулентных участков поведения, должен удовлетворять ряду критериев: простота реализации, точность детектирования моментов смены типа поведения в системе. Одним из подходящих под данные условия методов является метод, описанный в работе [13]. Отличительной особенностью этого метода является использование мгновенных фаз исследуемых систем, лежащих в пределах $[-2\pi; 2\pi]$. Именно на основе этого метода, была разработана методика диагностики участков ламинарного и турбулентного поведения для случая, когда в исследуемой системе присутствуют два и более типа перемежающегося поведения.

Апробация предложенного метода выделения участков ламинарного и турбулентного поведения в исследуемой системе и определения типа перемежаемости, к которому относится данный участок поведения, была проведена на примере системы двух однонаправленно связанных хаотических осцилляторов Ресслера [14]:

$$\begin{cases} \dot{x}_d = -\omega_d y_d - z_d, \\ \dot{y}_d = \omega_d x_d + a y_d, \\ \dot{z}_d = p + z_d (x_d - c), \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} \dot{x}_r = -\omega_r y_r - z_r + \varepsilon (x_d - x_r), \\ \dot{y}_r = \omega_r x_r + a y_r, \\ \dot{z}_r = p + z_r (x_r - c), \end{cases} \quad (2)$$

где (x_d, y_d, z_d) $[(x_r, y_r, z_r)]$ – декартовы координаты ведущего [ведомого] осциллятора; ε – параметр, отвечающий за интенсивность связи. Система (1) является ведущей, а система (2) – ведомой. Значения управляющих параметров по аналогии с предыдущими исследованиями [9, 15] были выбраны следующими: $a = 0.15$, $p = 0.2$, $c = 10.0$. Параметры $\omega_d = 0.93$ и $\omega_r = 0.95$ отвечают собственным частотам ведущей и ведомой подсистем соответственно. Следует отметить, что при указанных значениях управляющих па-

раметров оба осциллятора в автономном режиме демонстрируют хаотические колебания.

Изучение поведения однонаправленно связанных хаотических осцилляторов Ресслера будем производить на различных временных масштабах [11, 12], вводимых в рассмотрение с помощью непрерывного вейвлетного преобразования

$$W(s, t_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \psi_{s, t_0}^*(t) dt, \quad (3)$$

где $\psi_{s, t_0}(t)$ – вейвлетная функция, получаемая из материнского вейвлета $\psi_0(t)$:

$$\psi_{s, t_0}(t) = \frac{1}{\sqrt{s}} \psi\left(\frac{t - t_0}{s}\right). \quad (4)$$

Временной масштаб s определяет ширину вейвлета $\psi_{s, t_0}(t)$; t_0 – временной сдвиг вейвлетной функции вдоль оси времени, символ «*» в соотношении (3) означает комплексное сопряжение.

В качестве материнского вейвлета, следуя работам [11, 12], используется вейвлет Морле [16]

$$\psi_0(\eta) = \exp(j\omega_0 \eta) \exp(-\eta^2 / 2) / \sqrt[4]{\pi}. \quad (5)$$

Выбор значения параметра вейвлета $\omega_0 = 2\pi$ обеспечивает соотношение $s \approx 1/f$ между временным масштабом s вейвлетного преобразования и частотой f преобразования Фурье.

Вейвлетный спектр

$$W(s, t_0) = |W(s, t_0)| e^{j\varphi_s(t_0)} \quad (6)$$

характеризует поведение изучаемой системы на каждом временном масштабе s в любой момент времени t_0 . При этом величина $|W(s, t_0)|$ характеризует наличие и интенсивность соответствующего временного масштаба s в момент времени t_0 . Одновременно для каждого временного масштаба s оказывается естественным образом определена непрерывная фаза $\varphi_s(t) = \arg W(s, t)$. Говоря иначе, оказывается возможным охарактеризовать поведение каждого временного масштаба s с помощью ассоциированной с ним фазы $\phi(s, t)$, являющейся непрерывной функцией временного масштаба s и времени t . Введенное в рассмотрение таким образом семейство фаз наиболее полно характеризует поведение однонаправленно связанных хаотических осцилляторов Ресслера: можно описать поведение каждого временного масштаба с помощью ассоциированной с ним фазы $\phi(s, t)$.

Рассмотрим поведение систем (1), (2), порождающих временные реализации $x_{r,d}(t)$. Если для таких систем можно найти интервал временных масштабов $s_l \leq s \leq s_h$, для которого выполняется условие захвата фаз

$$|\varphi_{s_1}(t) - \varphi_{s_2}(t)| < \text{const}, \quad (7)$$

и условие ненулевой энергии (доля энергии вейвлетного спектра, приходящаяся на данный интервал временных масштабов, оказывается отличной от нуля)

$$E_{s_{nh}} = \int_{s_l}^{s_h} \langle E(t) \rangle ds > 0, \quad (8)$$

то такой режим называется синхронизацией временных масштабов.

Для выбранных значений управляющих параметров синхронный режим устанавливается при значении параметра интенсивности связи $\varepsilon_c = 0.042$, при этом синхронные временные масштабы лежат в диапазоне $s \in [s_l; s_h]$, $s_l = 4.9919$, $s_h = 8.246$ [17]. Отметим, что исследования проводились в области значений параметра интенсивности связи $\varepsilon < \varepsilon_c$, то есть в системе можно диагностировать перемежаемость «игольного ушка» [9]. Временные масштабы s , на которых проводилось рассмотрение, были выбраны асинхронными, в результате чего в системе можно было наблюдать перемежаемость типа «кольца».

Как было отмечено, метод выделения ламинарных и турбулентных участков поведения основывается на способе, предложенном в работе [13]. Для применения данного способа выделения характерных участков поведения необходимо использовать мгновенные фазы $\varphi_{s_1}(t)$ и $\varphi_{s_2}(t)$ не монотонно возрастающие от $-\infty$ до $+\infty$, а лежащие в пределах $[0; 2\pi]$. В этом случае разность фаз $\Delta\varphi(t)$ будет изменяться в диапазоне $[-2\pi; 2\pi]$ и иметь вид, показанный на рис. 1а.

На рис. 1а видно, что существует некоторый диапазон значений разности фаз $[\Delta\varphi_{\min}; \Delta\varphi_{\max}]$ (в рассматриваемом случае $\Delta\varphi_{\min} \approx -\pi$, $\Delta\varphi_{\max} \approx 2\pi$), выход значения $\Delta\varphi$ за пределы которого соответствует началу турбулентной фазы. При этом важно отметить, что все флуктуации величины $\Delta\varphi(t)$, обусловленные хаотическим характером колебаний взаимодействующих систем, оказываются локализованными в области ламинарных участков поведения систем, в то время как изменение разности фаз во

время турбулентной фазы практически не демонстрирует флуктуаций. Это позволяет во время численного анализа временных реализаций однозначно и очень точно диагностировать начало и конец турбулентной фазы по значению величины $\Delta\varphi(t)$.

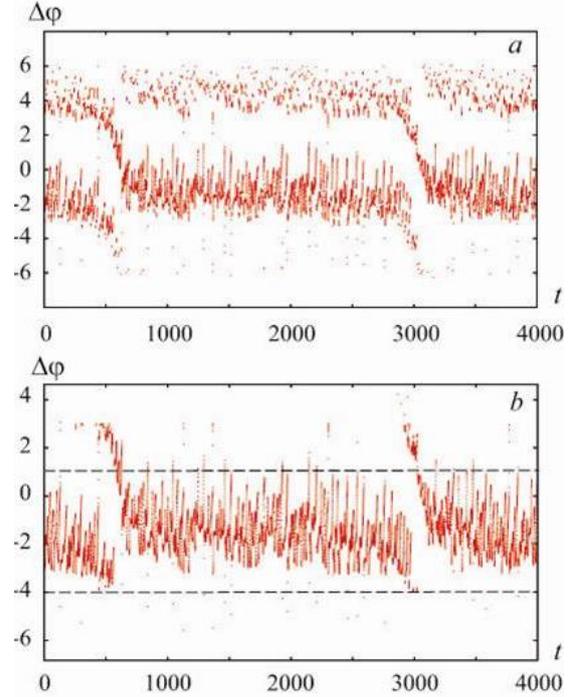


Рис. 1. Разности фаз $\Delta\varphi(t)$ для случаев:

- (а) мгновенные фазы лежат в диапазоне $[-2\pi; 2\pi]$;
- (б) диапазон изменения разности мгновенных фаз составляет 2π . Параметр связи во всех случаях $\varepsilon = 0.035$, временной масштаб $s = 4.96$.

Очевидно, что если величины $\varphi_{s_1}(t)$ и $\varphi_{s_2}(t)$ изменяются в диапазоне $[0; 2\pi]$, то разность фаз $\Delta\varphi(t)$ будет лежать в интервале $[-2\pi; 2\pi]$. При этом зависимость $\Delta\varphi(t)$ будет многозначной, что не очень удобно для анализа поведения изучаемых систем. Чтобы избавиться от этого недостатка, можно использовать факт 2π -периодичности фазы и перевести величину разности фаз из диапазона значений шириной 4π к аналогичному диапазону шириной 2π . При этом нужно стремиться к тому, чтобы значения разности фаз, соответствующие ламинарному участку поведения системы, приходились примерно на середину диапазона значений (рис. 1б). В этом случае диагностировать начало и конец участка турбулентной динамики можно по пересечению величиной $\Delta\varphi(t)$ некоторых установленных пороговых значений $\Delta\varphi_{\min}$ и $\Delta\varphi_{\max}$ (в рассматриваемом случае $\Delta\varphi_{\min} \approx -4$,

$\Delta\varphi_{\max} \approx 1$). Важно отметить, что и в этом случае все флуктуации, обычно препятствующие точному детектированию начала и конца ламинарных и турбулентных фаз, оказываются сосредоточенными в области значений $[\Delta\varphi_{\min}; \Delta\varphi_{\max}]$, соответствующей ламинарному характеру поведения систем, что позволяет избавиться от сложностей нахождения границ участков синхронной и асинхронной динамики.

Описанный метод позволяет точно определять начало и конец ламинарного участка поведения в исследуемых системах. Однако, как было отмечено ранее, такая методика не позволяет соотнести конкретный участок ламинарного поведения с типом перемежаемости, который в настоящий момент реализуется в системе. В связи с этим необходимо рассматривать проекцию фазовой траектории, соответствующей ведомой системе, на фазовой плоскости, вращающейся вокруг начала координат в соответствии с состоянием ведущей системы (см. более подробно [9]). Рассмотрение поведения проекции фазовой траектории в момент начала турбулентной фазы позволит соотнести, какому конкретному типу перемежаемости относится поведение, реализуемое в исследуемой системе. Это связано с тем, что механизм, приводящий к возникновению фазовых проскоков, для каждого из типов перемежающегося поведения различный, в частности, для перемежаемости «кольца». В момент фазового проскока проекция фазовой траектории будет охватывать начало координат вращающейся плоскости [9], для перемежаемости «игольного ушка» фазовая траектория будет вращаться вокруг начала координат [8] в случае турбулентного проскока. Используя этот подход, можно легко соотносить фазовый проскок с конкретным типом перемежаемости.

Если в качестве переменных, характеризующих состояние систем, рассматривать

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= \operatorname{Re} W_{1,2}(s, t), \\ y_{1,2} &= \operatorname{Im} W_{1,2}(s, t), \end{aligned} \quad (9)$$

то на вращающейся плоскости, введенной в рассмотрение в соответствии с [16],

$$\begin{aligned} x' &= x_2 \cos \varphi_1(s, t) + y_2 \sin \varphi_1(s, t), \\ y' &= -x_2 \sin \varphi_1(s, t) + y_2 \cos \varphi_1(s, t). \end{aligned} \quad (10)$$

С использованием выражения (10) был построен рис. 2, на котором представлена разность фаз исследуемых систем Ресслера (1), (2), при этом для каждого момента турбулентного проскока разности фаз построена проекция фазовой траектории на вращающейся плоскости. Из рисунка отчетливо видно, какому из типов

перемежающегося поведения относится конкретный проскок разности фаз.

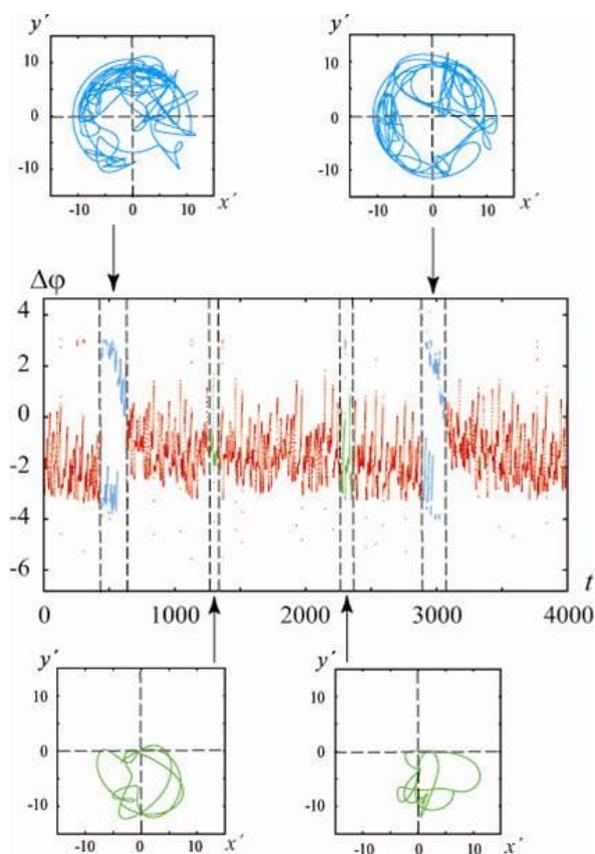


Рис. 2. Разности фаз $\Delta\varphi(t)$ для диапазона изменения разности мгновенных фаз 2π ; для фазовых проскоков представлено поведение проекции фазовой траектории, соответствующей ведомой системе, рассматриваемое на фазовой плоскости, вращающейся вокруг начала координат в соответствии с состоянием ведущей системы. Параметр связи $\varepsilon = 0.035$, временной масштаб $s = 4.96$.

Таким образом, была разработана методика выделения ламинарных участков поведения хаотической системы, попеременно демонстрирующей два различных типа перемежаемости. Отличительной чертой предложенного метода является его способность соотносить фазовый проскок с типом перемежаемости, которому он соответствует, при этом он позволяет точно определять момент начала и конец ламинарного поведения. Стоит отметить, что данный метод по-прежнему сохранил свои преимущества: это простота его реализации и малое время счета.

Работа выполнена при поддержке Федеральной целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 гг., госконтракт № 14.В37.21.0225 и фонда некоммерческих программ «Династия».

Список литературы

1. Dubois M., Rubio M., Berg'e P. // Phys. Rev. Lett. 1983. Vol. 51. P. 1446.
2. Boccaletti S., Valladares D.L. // Phys. Rev. E. 2000. Vol. 62, № 5. P. 7497.
3. Boccaletti S., Kurths J. et al. // Physics Reports. 2002. Vol. 366. P. 1.
4. Hramov A.E., Koronovskii A.A. // Europhysics Lett. 2005. Vol. 70, № 2. P. 169.
5. Hramov A.E., Koronovskii A.A., Levin Yu.I. // JETP. 2005. Vol. 127, № 4. P. 886.
6. Berg'e P., Pomeau Y., Vidal Ch. L'ordre dans le chaos. Hermann, Paris, 1988.
7. Platt N., Spiegel E.A., Tresser C. // Phys. Rev. Lett. 1993. Vol. 70, □ 3. P. 279.
8. Pikovsky A.S., Osipov G.V., et al. // Phys. Rev. Lett. 1997. Vol. 79, 1. P. 47
9. Hramov A.E., Koronovskii A.A., Kurovskaya M.K., Boccaletti S. // Phys. Rev. Lett. 2006. Vol. 97. 114101.
10. Журавлев М.О., Короновский А.А., Москаленко О.И., Храмов А.Е. // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2011. 19. 1.
11. Hramov A.E., Koronovskii A.A. // Chaos. 2004. V. 14, № 3. P. 603.
12. Hramov A.E., Koronovskii A.A. // Physica D. 2005. Vol. 206, №. 3–4. P. 252–264.
13. Журавлев М.О., Куровская М.К., Москаленко О.И. // Письма в ЖТФ. 2010. Вып. 36, № 10. С. 31–38.
14. Pikovsky A.S., Rosenblum M.G., Osipov G.V., Kurths J.// Physica D 104 (4). 1997. P. 219–238.
15. Hramov A.E., Koronovskii A.A., Kurovskaya M.K. // Phys. Rev. E. 2007. V.75. P. 036205.
16. Grossman A., Morlet J.// SIAM J. Math. Anal. 1984. V.15, No. 4, P. 273.
17. Zhuravlev M.O., Koronovskii A.A., Moskalenko O.I., Ovchinnikov A.A., Hramov A.E. // Phys. Rev. E. 83. 2011. 027201.

METHOD OF LAMINAR PHASE DETECTION IN CHAOTIC SYSTEMS IN WHICH TWO VARIOUS TYPES INTERMITTENCY ARE REALIZED

M.O. Zhuravlev, O.I. Moskalenko, A.A. Koronovskii, A.E. Hramov

In this paper the new method of detection of laminar phases un time series of coupled chaotic oscillations in which two various types of alternating behaviour simultaneously exist is proposed. The characteristic feature of the proposed method is its ability to connect the phase slip with the corresponding type of intermittency. At that, it allows to define precisely the moment of the beginning and finishing of laminar behaviour. It is necessary to notice that the given method has also a number of advantages, i.e. it is simple enough for practical realisation and takes a small time during calculations.

Keywords: chaotic synchronization, intermittency, time scale.