

**ДИНАМИЧЕСКИЙ ХАОС  
В РАДИОФИЗИКЕ И ЭЛЕКТРОНИКЕ**

УДК 517.9

**ОБОБЩЕННАЯ СИНХРОНИЗАЦИЯ В СЕТЯХ  
СО СЛОЖНОЙ ТОПОЛОГИЕЙ МЕЖЭЛЕМЕНТНЫХ СВЯЗЕЙ**

© 2013 г. А. А. Короновский, О. И. Москаленко, А. Е. Храмов, С. А. Шурыгина

Саратовский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского,

Российская Федерация, 410012, Саратов, ул. Астраханская, 83

E-mail: o.i.moskalenko@gmail.com

Поступила в редакцию 30.11.2012 г.

Предложена концепция обобщенной синхронизации, справедливая как для двух однонаправлено или взаимно связанных хаотических осцилляторов, так и сетей со сложной топологией межэлементных связей, в узлах которых находятся хаотические системы. Показано, что порог возникновения обобщенной синхронизации в системах с 1.5 степенями свободы может быть диагностирован по моменту перехода второго (положительного) показателя Ляпунова в область отрицательных значений. Полученные результаты подтверждены при помощи метода ближайших соседей. Выявлены физические механизмы возникновения обобщенной синхронизации в таких системах.

DOI: 10.7868/S0033849413050057

**ВВЕДЕНИЕ**

Одним из известных типов синхронного поведения связанных хаотических систем является режим обобщенной хаотической синхронизации [1–3]. Этот режим традиционно вводится в рассмотрение для системы двух однонаправленно связанных хаотических осцилляторов — ведущего  $\bar{x}(t)$  и ведомого  $\bar{u}(t)$ , и означает, что после завершения переходного процесса между состояниями этих систем устанавливается уникальное функциональное соотношение  $F_1[\cdot]$  такое, что

$$\bar{u}(t) = F_1[\bar{x}(t)]. \quad (1)$$

В последнее время появились попытки обобщения режима обобщенной синхронизации на системы с взаимным типом связи: две взаимно связанные хаотические системы [4] и сети со сложной топологией межэлементных связей [5, 6]. В то же время известные работы, посвященные этой проблеме, направлены лишь на установление факта существования этого режима, в то время как само понятие обобщенной синхронизации для таких систем, как правило, не вводится в рассмотрение. Более того, во всех известных работах диагностика обобщенной синхронизации производится при помощи модификации метода вспомогательной системы [7], являющегося эффективным средством анализа обобщенной синхронизации в системах с однонаправленной связью, однако вопрос о корректности применения этого метода к системам с взаимным типом связи остается открытым.

В данной работе впервые предлагается универсальная концепция обобщенной синхронизации, справедливая как для двух систем, связанных однонаправлено или взаимно, так и для сетей хаотических осцилляторов со сложной топологией межэлементных связей. Как будет показано ниже, диагностирование обобщенной синхронизации в таких системах можно осуществлять путем расчета спектра ляпуновских показателей или при помощи метода ближайших соседей, при этом метод вспомогательной системы для систем с взаимным типом связи приводит к некорректным результатам.

**1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОБОБЩЕННОЙ  
СИНХРОНИЗАЦИИ И МЕХАНИЗМЫ  
ЕЕ УСТАНОВЛЕНИЯ**

Прежде всего обобщим понятие обобщенной синхронизации (1) на случай взаимной связи между системами. Для учета взаимного влияния систем друг на друга уравнение (1) для двух взаимно связанных систем перепишем в виде

$$F_2[\bar{x}(t), \bar{u}(t)] = 0, \quad (2)$$

а для сети из  $N$  элементов запишем как

$$F_3[\bar{x}_1(t), \bar{x}_2(t), \dots, \bar{x}_i(t), \dots, \bar{x}_N(t)] = 0, \quad (3)$$

где  $\bar{x}_i(t)$  — вектор состояния  $i$ -й системы. При этом уравнение (2) может быть рассмотрено как частный случай (3) и оказывается справедливым как для однонаправленного, так и взаимного типа связи между системами, в то время как соотношение (1)

является частным случаем соотношения (2). Другими словами, под обобщенной синхронизацией взаимно связанных систем, так же как и в случае однонаправленной связи, мы будем понимать такой режим, при котором имеет место установление уникального функционального соотношения между состояниями этих систем, но функциональное соотношение в данном случае будет иметь вид (3) вместо (1).

Рассмотрим механизмы возникновения обобщенной синхронизации в сложных сетях с диссипативным характером связей между элементами. Понятно, что две однонаправленно или взаимно связанные системы могут быть рассмотрены как простейший вариант сети, состоящей из двух элементов, поэтому все рассуждения, которые будут приведены ниже, оказываются справедливыми и для таких систем.

Предположим, что в узлах сети из  $N$  элементов находятся трехмерные динамические системы<sup>1</sup>, демонстрирующие хаотическую динамику, состояние каждой из которых характеризуется вектором состояния  $\vec{x}_i = (x_i, y_i, z_i)$ , где  $i = \overline{1, N}$ , при этом элементы сети могут быть неидентичными. Для выявления механизмов возникновения обобщенной синхронизации такой сети ее состояние удобно характеризовать одним вектором

$$\mathbf{U} = (u_1, u_2, \dots, u_i, \dots, u_{3N})^T,$$

где  $u_{3i-2} = x_i$ ,  $u_{3i-1} = y_i$ ,  $u_{3i} = z_i$ . В этом случае эволюция сложной сети будет определяться следующим уравнением:

$$\dot{\mathbf{U}} = \mathbf{L}(\mathbf{U}) + \varepsilon \tilde{\mathbf{G}}\mathbf{U}, \quad (4)$$

где  $\mathbf{L}(\cdot)$  – вектор эволюции узлового элемента сети в отсутствие связи, слагаемое  $\varepsilon \tilde{\mathbf{G}}$  описывает влияние топологии сети и силы межэлементных связей. Матрица  $\tilde{\mathbf{G}}$ , характеризующая структуру диссипативных связей между элементами сети, – симметричная матрица, сумма элементов  $G_{ij}$  в каждой строке которой равна 0,  $\tilde{G}_{ii} = -\sum_{j \neq i} \tilde{G}_{ij}$  (условие диссипативности), причем  $\tilde{G}_{ij} = 1$  ( $i \neq j$ ), если  $u_i$  воздействует на  $u_j$ , и равно 0 в противном случае. Отметим, что все элементы матрицы  $\tilde{G}_{ij}$  являются положительными или равными нулю за исключением диагональных элементов  $\tilde{G}_{ii}$  (они отрицательны либо равны нулю).

Нетрудно заметить, что слагаемое  $\varepsilon \tilde{\mathbf{G}}\mathbf{U}$  вносит дополнительную диссипацию в систему (4). Действительно, об уровне диссипации и скорости

сжатия фазового объема в рассматриваемой системе свидетельствует дивергенция векторного поля

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V} \frac{\Delta V}{\Delta t} = \text{div} \mathbf{L} + \varepsilon \sum_{i=1}^{3N} \tilde{G}_{ii}, \quad (5)$$

где  $\Delta V$  – элементарный объем фазового пространства системы (4). Так как  $\tilde{G}_{ii} \leq 0$ , слагаемое  $\varepsilon \sum_{i=1}^{3N} \tilde{G}_{ii}$  также отрицательно. Следовательно, с ростом параметра связи  $\varepsilon$  увеличивается диссипация в рассматриваемой сети, что приводит к упрощению хаотической динамики системы (4) [8, 9].

Для характеристики сложности хаотического движения обычно рассчитывается спектр показателей Ляпунова. В рассматриваемом случае поведение системы (4) описывается набором  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_{3N}$  показателей Ляпунова, причем для  $\varepsilon = 0$  положительными должны быть  $N$  старших из них. При увеличении диссипации в системе изначально положительные ляпуновские показатели постепенно становятся отрицательными. Поскольку каждый показатель Ляпунова характеризует эволюцию возмущения вдоль определенного направления, переход одного из показателей Ляпунова из области положительных значений в область отрицательных приводит к увеличению на единицу количества направлений, по которым осуществляется сжатие фазового объема в  $3N$ -мерном фазовом пространстве сети взаимодействующих элементов. Когда  $\lambda_2$  становится отрицательным, остается только один положительный ляпуновский показатель рассматриваемой сети, что и соответствует установлению режима обобщенной синхронизации. Понятно, что в данном случае режим обобщенной синхронизации может быть интерпретирован как переход от гиперхаотических колебаний к хаотическим. Отметим также, что отрицательность второго показателя Ляпунова  $\lambda_2$  как критерий существования обобщенной синхронизации согласуется с аналогичным критерием, используемым для диагностики обобщенной синхронизации в однонаправленно связанных системах [8, 10].

В то же время известны работы (см., например, [11]), в которых переход одного из положительных ляпуновских показателей в область отрицательных значений в системах с взаимным типом связи связывают с моментом наступления режима синхронизации с запаздыванием, когда взаимодействующие системы демонстрируют идентичные колебания, сдвинутые на некоторый временной интервал  $\tau$ , т.е.  $\vec{u}(t) = \vec{x}(t - \tau)$ . Однако разность между критическими значениями параметра связи, соответствующими переходу положительного ляпуновского показателя в область отрицательных значений и моменту установления режима синхронизации с запаздыванием, может

<sup>1</sup> Отметим, что рассуждения, приведенные ниже, могут быть обобщены на системы с произвольной размерностью фазового пространства. Для простоты ограничимся трехмерным фазовым пространством.

быть достаточно большой, что было объяснено в [11] наличием перемежаемости. Так как режим синхронизации с запаздыванием является частным случаем режима обобщенной синхронизации и наступает при больших значениях параметра связи в системе [12], возникает вопрос о существовании режима обобщенной синхронизации во взаимно связанных системах, отличного от режима синхронизации с запаздыванием: существует ли такой режим или отличие в пороговых значениях, упомянутых выше, действительно можно объяснить наличием перемежаемости?

Наряду с расчетом спектра ляпуновских показателей в однонаправленно связанных системах широко используются метод вспомогательной системы [7] и метод ближайших соседей [1, 13]. При этом следует отметить, что метод вспомогательной системы получил наибольшее распространение на практике в связи с простотой его реализации и высокой точностью определения порогового значения установления синхронного режима. Именно поэтому метод вспомогательной системы и был впервые обобщен на случай взаимной связи между системами [4] и сетей со сложной топологией межэлементных связей [5, 6].

Согласно этому методу наряду с каждым элементом сети должна быть введена в рассмотрение его идентичная по управляющим параметрам копия, которая стартует с других начальных условий, принадлежащих тому же бассейну притяжения хаотического аттрактора, и испытывает воздействие со стороны тех же элементов сети, что и исходная система (тип связи между этими системами должен быть однонаправленным, см. рис. 1а). Обобщенная синхронизация в этом случае возникает тогда, когда все элементы сети и их копии начинают попарно демонстрировать идентичное поведение.

Такое обобщение метода вспомогательной системы на сети связанных нелинейных элементов, на первый взгляд, кажется достаточно очевидным. В то же время более детальный анализ показывает, что такая модификация метода даже для двух взаимно связанных систем может приводить к некорректным результатам. В частности, по аналогии с работой [4], рассмотрим две взаимно связанные системы,  $\bar{x}(t)$  и  $\bar{u}(t)$ , и введем в рассмотрение два вспомогательных осциллятора,  $\bar{x}'(t)$  и  $\bar{u}'(t)$ , идентичных по управляющим параметрам  $\bar{x}(t)$  и  $\bar{u}(t)$  соответственно. Тип связи между исходными  $\bar{x}(t)$ ,  $\bar{u}(t)$  и вспомогательными  $\bar{x}'(t)$ ,  $\bar{u}'(t)$  системами, как упоминалось выше, должен быть однонаправленным (см. рис. 1б). Тогда, следуя работе [4], в которой одна из пар идентичных по управляющим параметрам систем (например,  $\bar{u}(t)$  и  $\bar{u}'(t)$ ) начинает демонстрировать идентичное поведение, в системе реализуется режим частичной обобщенной синхронизации. Как только состоя-

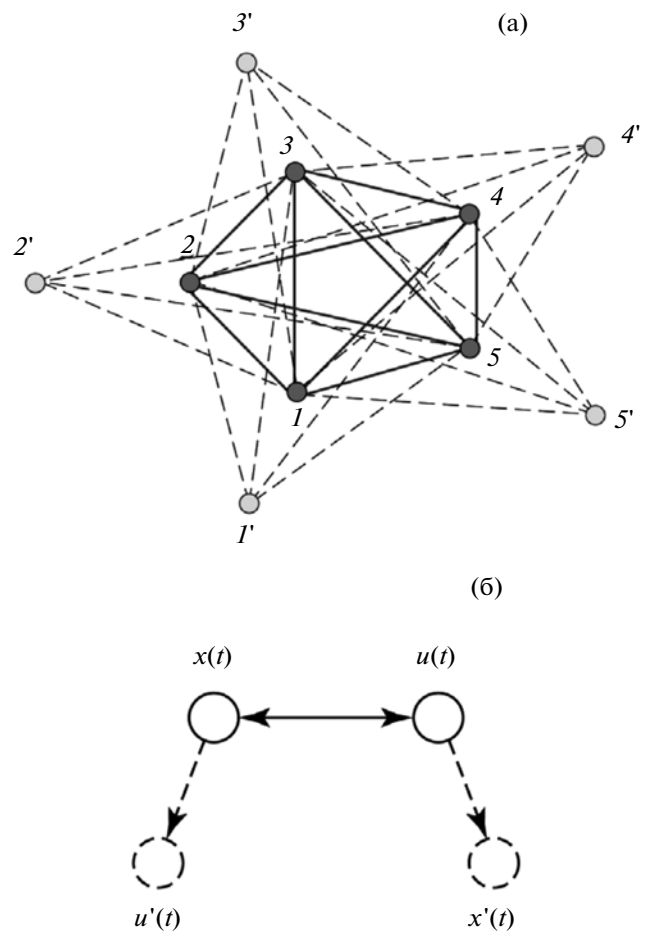


Рис. 1. Иллюстрация метода вспомогательной системы для сети связанных нелинейных элементов (а) и для двух взаимно связанных систем (б).

ния обеих пар идентичных систем начнут совпадать (т.е.  $\bar{u}(t) \equiv \bar{u}'(t)$  и  $\bar{x}(t) \equiv \bar{x}'(t)$ ), в системе возникнет режим полной обобщенной синхронизации.

Теперь рассмотрим вырожденную ситуацию, когда взаимодействующие взаимно связанные системы  $\bar{x}(t)$  и  $\bar{u}(t)$  идентичны. Тогда между состояниями взаимодействующих систем возможно установление режима полной хаотической синхронизации, когда  $\bar{x}(t) \equiv \bar{u}(t)$ . Ввиду идентичности вспомогательных систем, введенных в рассмотрение согласно методу, описанному выше, режимы частичной и полной обобщенной синхронизации должны совпадать друг с другом. Понятно, что режим обобщенной синхронизации, реализуемый между состояниями взаимно связанных систем, в данном случае эквивалентен режиму полной синхронизации между исходной системой и вспомогательной. В силу однонаправленного типа связи между ними, режим полной синхронизации в таких системах будет возникать в два раза позже, чем в исходных системах, связанных взаимно [14]. То есть по терминологии работы [4] ре-

жим обобщенной синхронизации в данном случае оказывается сильнее режима полной синхронизации, что противоречит самому определению режима обобщенной синхронизации. Если параметры взаимодействующих систем немного расстроены, вместо полной синхронизации имеет место режим синхронизации с запаздыванием. В этом случае, как будет показано ниже, применение метода вспомогательной системы для осцилляторов с взаимным характером связи снова приводит к противоречию: режим обобщенной синхронизации по терминологии работы [4] оказывается сильнее синхронизации с запаздыванием. Понятно, что аналогичная ситуация имеет место и в сетях со сложной топологией. Таким образом, метод вспомогательной системы оказывается неприменимым для анализа обобщенной синхронизации в системах связанных нелинейных элементов.

Другим методом диагностики обобщенной синхронизации в однонаправленно связанных системах является метод ближайших соседей. В данном методе наличие функционального соотношения между состояниями взаимодействующих систем означает, что все близкие состояния в фазовом пространстве первой системы  $\bar{x}(t)$  соответствуют близким состояниям в фазовом пространстве второй системы  $\bar{y}(t)$  (более подробно см. [1]). Для двух взаимно связанных систем верно и обратное утверждение: все близкие состояния в фазовом пространстве второй системы  $\bar{y}(t)$  должны соответствовать близким состояниям в фазовом пространстве первой системы  $\bar{x}(t)$ , а в случае сложных сетей — состояниями всех элементов сети должны оставаться близкими. Количественной характеристикой степени близости состояний систем является среднее расстояние между двумя состояниями одной из систем  $\bar{u}^k$  и  $\bar{u}^{kn}$ , нормированное на среднее расстояние  $\delta$  между случайно выбранными состояниями другой системы [13]:

$$d = \frac{1}{N\delta} \sum_{k=0}^{N-1} \|\bar{u}^k - \bar{u}^{kn}\|, \quad (6)$$

где  $N$  — число производимых итераций. В режиме обобщенной синхронизации  $d \rightarrow 0$ , в отсутствие функционального соотношения между состояниями взаимодействующих систем  $d \approx 1$ .

Однако несмотря на то что метод ближайших соседей может быть без труда применен к анализу взаимно связанных систем и сетей нелинейных элементов, в то же время он обладает принципиальным недостатком, являясь недостаточно точным. Следовательно, он позволяет определить порог возникновения синхронного режима только приблизительно и находит применение при обработке экспериментальных данных (где реализация других методов анализа представляется затруднительной) или используется для уточне-

ния полученных результатов. Поэтому в данной работе будем использовать метод ближайших соседей для верификации факта наступления обобщенной синхронизации в системах с взаимным типом связи и сложных сетях по моменту перехода второго (положительного) ляпуновского показателя в область отрицательных значений. Чтобы показать, что диагностируемый режим отличается от режима синхронизации с запаздыванием, в настоящей работе проводится диагностика и этого режима.

## 2. ОБОБЩЕННАЯ СИНХРОНИЗАЦИЯ В ДВУХ ВЗАИМНО СВЯЗАННЫХ СИСТЕМАХ

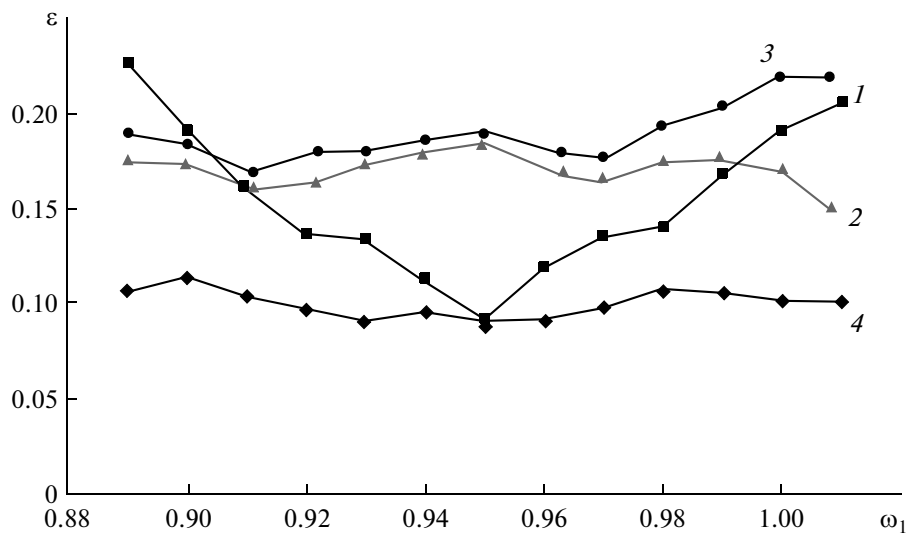
Чтобы проверить справедливость рассуждений, приведенных в разделе 1, рассмотрим поведение двух взаимно связанных систем Ресслера

$$\begin{aligned} \dot{x}_{1,2} &= -\omega_{1,2}y_{1,2} - z_{1,2} + \varepsilon(x_{2,1} - x_{1,2}), \\ \dot{y}_{1,2} &= \omega_{1,2}x_{1,2} + ay_{1,2}, \\ \dot{z}_{1,2} &= p + z_{1,2}(x_{1,2} - c), \end{aligned} \quad (7)$$

где  $\bar{x}_{1,2}(t) = (x_{1,2}, y_{1,2}, z_{1,2})^T$  — векторы состояния взаимодействующих систем,  $\varepsilon$  — параметр связи,  $a = 0.15$ ,  $p = 0.2$ ,  $c = 10$  — управляющие параметры. Параметр  $\omega_2$ , характеризующий собственную частоту колебаний второй системы, был выбран равным  $\omega_2 = 0.95$ , в то время как аналогичный параметр первой системы варьировался в диапазоне [0.89; 1.01], чтобы обеспечить расстройку между взаимодействующими осцилляторами.

Известно, что при увеличении силы связи  $\varepsilon$  взаимно связанные системы Ресслера (7) демонстрируют переход от асинхронного состояния к режиму синхронизации с запаздыванием [11] через режим фазовой синхронизации и синхронизации временных масштабов. Как отмечалось выше, режим синхронизации с запаздыванием является частным случаем режима обобщенной синхронизации и реализуется при больших значениях параметра связи, т.е. если в системе наблюдается режим синхронизации с запаздыванием, то в ней обязательно существует и режим обобщенной синхронизации. В то же время диагностика режима обобщенной синхронизации при помощи метода вспомогательной системы, предложенная в [4], приводит к некорректным результатам. Для подтверждения этого факта сравним пороговые значения возникновения этих типов синхронного поведения друг с другом.

На рис. 2 приведены границы возникновения различных типов хаотической синхронизации на плоскости параметров  $(\omega_1, \varepsilon)$ . Здесь также показаны границы режимов частичной и полной обобщенной синхронизации, диагностируемых методом вспомогательной системы (см. раздел 1). Не-



**Рис. 2.** Границы режимов синхронизации с запаздыванием (1), частичной (2) и полной (3) обобщенной синхронизации (в терминологии работы [12]) в системе двух взаимно связанных осцилляторов Ресслера (7). Кривая 4 соответствует моменту перехода одного из положительных ляпуновских показателей системы (7) в область отрицательных значений.

трудно заметить, что в общем случае режимы частичной и полной обобщенной синхронизации возникают после момента возникновения синхронизации с запаздыванием (отметим, что в области достаточно больших значений расстройки собственных частот возможно наступление этих режимов до наступления синхронизации с запаздыванием).

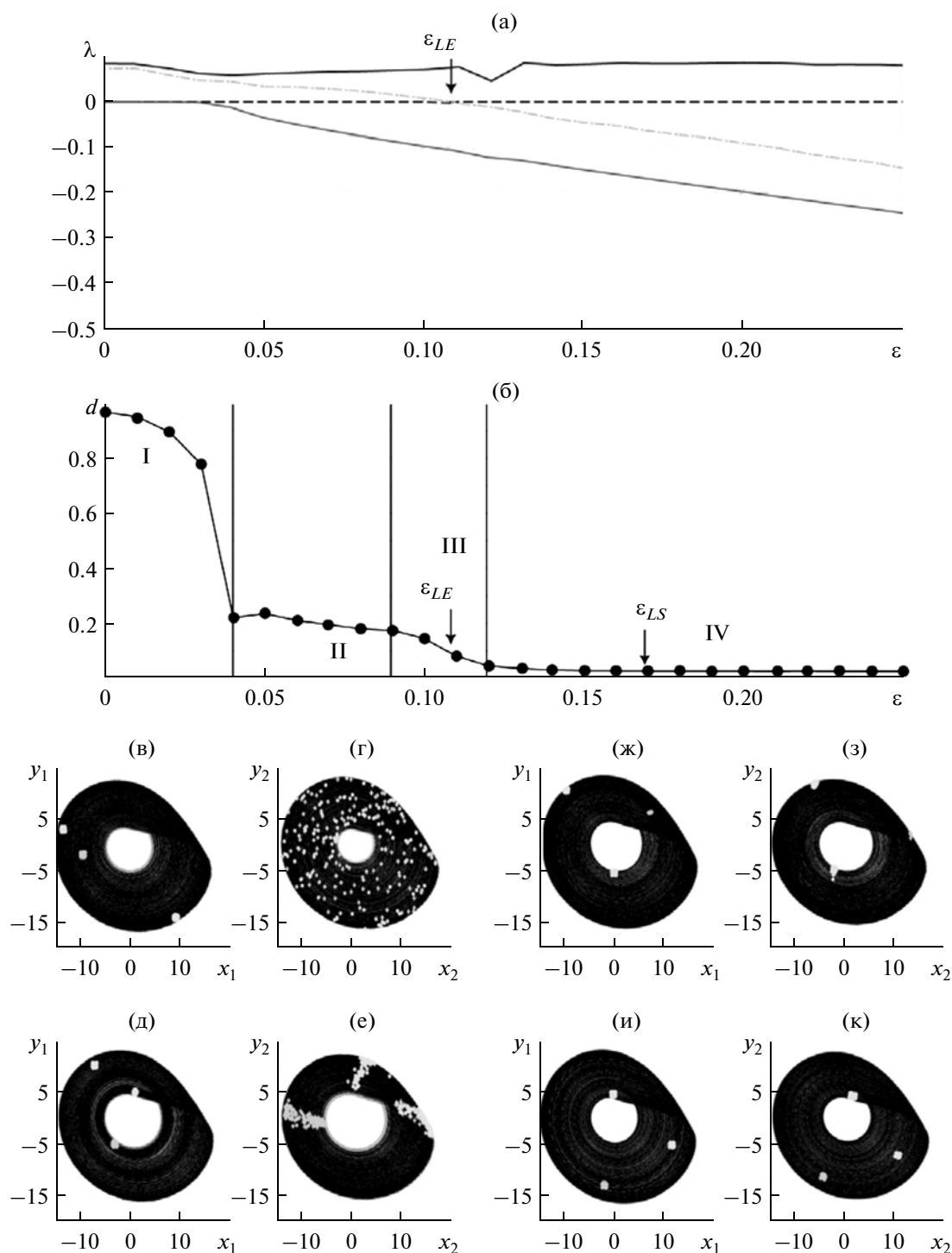
Таким образом, проведенные численные расчеты подтверждают теоретические рассуждения, приведенные в разделе 1, о некорректности применения метода вспомогательной системы к анализу поведения хаотических осцилляторов, связанных взаимно. Покажем, что режим обобщенной синхронизации в этом случае может быть диагностирован по моменту перехода одного из положительных ляпуновских показателей в область отрицательных значений.

На рис. 2 приведена также граница перехода второго ляпуновского показателя через нуль в системе (7) (рис. 2, кривая 4). Видно, что указанная граница не совпадает ни с одной из критических кривых (границами синхронизации с запаздыванием, частичной и полной обобщенной синхронизаций по терминологии работы [4]), приведенных на рисунке. Более того, она проходит ниже границы синхронизации с запаздыванием и практически не зависит от величины частотной расстройки между взаимодействующими системами.

Переход одного из положительных показателей Ляпунова в область отрицательных значений, как упоминалось в разделе 1, объяснялся в работе [11] возникновением синхронизации с запаздыванием, а различие между критическими значе-

ниями параметра связи, соответствующими этим режимам, — наличием перемежающегося поведения — перемежающейся синхронизации с запаздыванием [15]. Между тем, как видно из рис. 2, границы возникновения обоих типов поведения абсолютно не связаны друг с другом: пороговое значение параметра связи, соответствующее установлению синхронизации с запаздыванием, монотонно растет при увеличении частотной расстройки, в то время как критическая кривая, характеризующая переход одного из положительных ляпуновских показателей в область отрицательных значений, практически не зависит от последней. Более того, как было выявлено в ходе проведенных исследований, при различных значениях управляющих параметров взаимодействующих систем перемежающееся поведение может наблюдаться как до, так и после момента перехода положительного ляпуновского показателя через нуль.

Таким образом, переход одного из положительных показателей Ляпунова во взаимно связанных системах в область отрицательных значений никак не связан с возникновением синхронизации с запаздыванием и перемежаемости вблизи ее границ. Можно предположить, что по аналогии со случаем однонаправленно связанных систем этот режим может быть интерпретирован как переход к обобщенной синхронизации в системах с взаимным типом связи. Для проверки сделанных предположений применим метод ближайших соседей для диагностики обобщенной синхронизации в системе (7) при  $\omega_1 = 0.99$ . На рис. 3б приведена зависимость количественной меры  $d$  от параметра связи  $\varepsilon$ .



**Рис. 3.** Зависимость четырех старших ляпуновских показателей (а) и количественной меры  $d$  (б) от параметра связи  $\varepsilon$  для системы (7),  $\omega_1 = 0.99$ . Критические значения параметра связи  $\varepsilon_{LE} = 0.106$  (момент перехода одного из положительных ляпуновских показателей в область отрицательных значений) и  $\varepsilon_{LS} = 0.169$  (момент возникновения синхронизации с запаздыванием) показаны стрелками. в–к – Фазовые портреты осцилляторов Ресслера для различных значений параметра связи: (в, г)  $\varepsilon = 0.01$  (асинхронное состояние); (д, е)  $\varepsilon = 0.05$  (режим фазовой синхронизации); (ж, з)  $\varepsilon = 0.12$  (режим обобщенной синхронизации); (и, к)  $\varepsilon = 0.18$  (режим синхронизации с запаздыванием). На рисунках (в, д, ж, и) приведены хаотические аттракторы первой системы  $\vec{x}(t)$  с тремя случайно выбранными точками  $\vec{x}^k$  и их ближайшими соседями  $\vec{x}^{kn}$ . Рисунки (г, е, з, к) иллюстрируют соответствующие им состояния  $\vec{u}^{k, kn}$  в фазовом пространстве второй системы  $\vec{u}(t)$ .

На рис. 3а показана также зависимость четырех старших ляпуновских показателей для системы (7),  $\omega_1 = 0.99$ . Момент перехода одного из положительных ляпуновских показателей в область отрицательных значений  $\varepsilon_{GS} = 0.106$  отмечен стрелкой на обоих рисунках. Видно, что в этот момент количественная мера  $d$  оказывается близкой к нулю, что указывает на возникновение обобщенной синхронизации в системе (7).

Проанализируем характер зависимости  $d(\varepsilon)$  более детально. Из рис. 3б видно, что плоскость  $(\varepsilon; d)$  может быть условно разделена на четыре области: I —  $\varepsilon \in [0; 0.04)$ , мера  $d$  уменьшается достаточно резко, характеризуя переход от асинхронного состояния к режиму фазовой синхронизации при  $\varepsilon_{PS} = 0.04$ ; II —  $\varepsilon \in [0.04; 0.09)$ ,  $d$  практически не меняется, что свидетельствует о существовании режима фазовой синхронизации; III —  $\varepsilon \in [0.09; 0.12)$ , мера  $d$  убывает очень медленно, что отвечает возникновению режима обобщенной синхронизации; IV —  $\varepsilon > 0.12$ ,  $d \approx 0$ . Отметим, что в области IV имеет место слабое изменение количественного значения  $d$ : как до, так и после момента возникновения синхронизации с запаздыванием ( $\varepsilon_{LS} \approx 0.169$ , отмечено стрелкой на рисунке) она практически не меняет своего значения. Приведенные расчеты свидетельствуют также о том, что режимы частичной и полной обобщенной синхронизации (в терминологии работы [4]) не приводят ни к качественным, ни к количественным изменениям количественной меры  $d$  и спектра ляпуновских показателей, в то время как все остальные типы синхронного поведения находят отражение и в той и в другой характеристике.

На рис. 3в–3к приведены фазовые портреты взаимодействующих систем Ресслера (7) при различных значениях параметра связи  $\varepsilon$ . На каждом фазовом портрете первой системы  $\vec{x}(t)$  (рис. 3в, 3д, 3ж, 3и) приведены также три случайно выбранные точки  $\vec{x}^k$  и их ближайшие соседи  $\vec{x}^{kn}$ . Рисунки 3г, 3е, 3з, 3к иллюстрируют соответствующие им состояния  $\vec{u}^{k, kn}$  в фазовом пространстве второй системы  $\vec{u}(t)$ .

Нетрудно заметить, что при малых значениях параметра связи ( $\varepsilon = 0.01$ ) все точки в фазовом пространстве второй системы распределены случайным образом по всему аттрактору (рис. 3г). При увеличении параметра связи точки начинают группироваться в ограниченном диапазоне аттрактора, причем радиус этой области уменьшается с ростом параметра связи (ср. рис. 3е, 3з). При  $\varepsilon > \varepsilon_{LE}$  все состояния второй системы, соответствующие ближайшим соседям первого осциллятора, оказываются также близкими, и наоборот (рис. 3ж, 3з и рис. 3и, 3к), что доказывает возникновение обобщенной синхронизации. Однако следует отметить и некую разницу между

рассматриваемыми режимами: в режиме синхронизации с запаздыванием изображающие точки, соответствующие ближайшим соседям, находятся практически в одних и тех же частях хаотического аттрактора (рис. 3и, 3к), в то время как в режиме обобщенной синхронизации они могут находиться в несколько разных областях (рис. 3ж, 3з).

Аналогичные результаты были получены для системы двух взаимосвязанных генераторов на туннельном диоде [16]. Уравнения, описывающие динамику системы, имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \omega_1^2 [h(x_1 - \varepsilon(y_2 - y_1)) + y_1 - z_1], \\ \dot{y}_1 &= -x_1 + \varepsilon(y_2 - y_1), \\ \mu \dot{z}_1 &= x_1 - f(z_1), \\ \dot{x}_2 &= \omega_2^2 [h(x_2 - \varepsilon(y_1 - y_2)) + y_2 - z_2], \\ \dot{y}_2 &= -x_2 + \varepsilon(y_1 - y_2), \\ \mu \dot{z}_2 &= x_2 - f(z_2), \end{aligned} \quad (8)$$

где  $h = 0.2$ ,  $\mu = 0.1$ ,  $\omega_2 = 1.02$  — управляющие параметры,  $\varepsilon$  — параметр связи. В качестве безразмерной характеристики нелинейного элемента использовалась зависимость

$$f(\xi) = -\xi + 0.002 \operatorname{sh}(5\xi - 7.5) + 2.9.$$

На рис. 4 приведены границы возникновения режимов обобщенной синхронизации (диагностируемой по моменту перехода одного из положительных ляпуновских показателей в область отрицательных значений) и синхронизации с запаздыванием в системе (8). Нетрудно заметить, что поведение этих границ качественно аналогично последним в системе двух взаимно связанных осцилляторов Ресслера (рис. 2): порог обобщенной синхронизации практически не зависит от величины расстройки между системами, в то время как значение параметра связи, соответствующее моменту установления режима синхронизации с запаздыванием, при увеличении расстройки начинает монотонно расти. Таким образом, по аналогии с взаимно связанными системами Ресслера, по всей видимости, можно говорить о возникновении обобщенной синхронизации в системе двух взаимно связанных генераторов на туннельном диоде.

Для проверки этого утверждения рассмотрим поведение спектра ляпуновских показателей для системы (8). На рис. 5а представлена зависимость четырех старших ляпуновских показателей при  $\omega_1 = 1.09$ . Момент перехода одного из положительных ляпуновских показателей в область отрицательных значений  $\varepsilon_{GS} = 0.078$  показан стрелкой.

На рис. 5б–5и приведены фазовые портреты генераторов на туннельном диоде (8) для различных значений параметра связи. Как и в случае систем Ресслера, на каждом фазовом портрете первой системы  $\vec{x}(t)$  (рис. 5б, 5г, 5е, 5з) показаны три

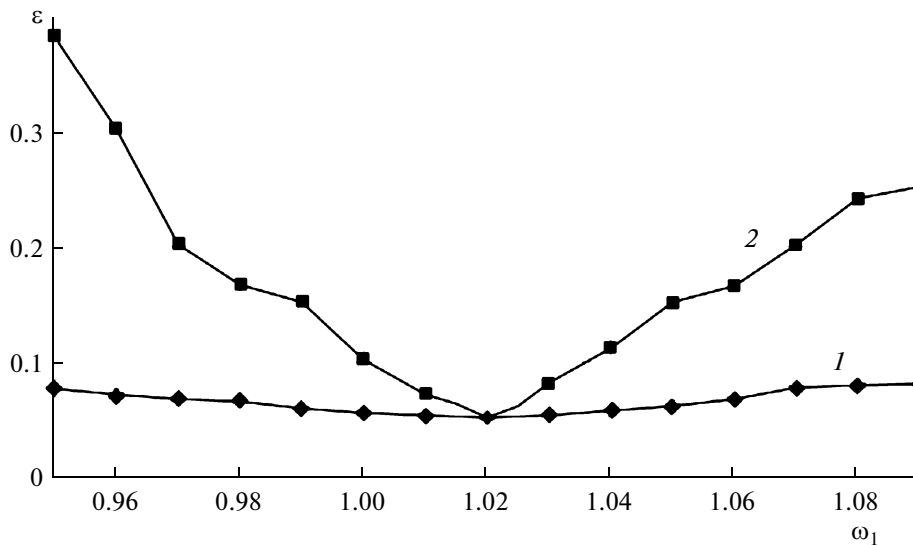


Рис. 4. Границы режимов обобщенной синхронизации (1) и синхронизации с запаздыванием (2) в системе двух взаимно связанных генераторов на туннельном диоде (8).

случайно выбранные точки  $\bar{x}^k$  и их ближайшие соседи  $\bar{x}^{kn}$ , а их “образы” ( $\bar{y}^k$  и  $\bar{y}^{kn}$  соответственно) в фазовом пространстве второй системы  $\bar{y}(t)$  приведены на рис. 5в, 5д, 5ж, 5и. Видно, что характер расположения “образов” ближайших соседей в фазовом пространстве второй системы при различных значениях параметра связи  $\varepsilon$  аналогичен случаю взаимно связанных осцилляторов Ресслера (7). Кроме того, здесь также отчетливо видно различие в поведении изображающих точек, соответствующих ближайшим соседям, в режимах обобщенной синхронизации и синхронизации с запаздыванием (рис. 5е, 5ж и 5з, 5и).

Таким образом, на основании полученных результатов можно сделать вывод о том, что, как и в случае двух однонаправленно связанных хаотических осцилляторов [12], в двух взаимно связанных хаотических системах возникновение режима обобщенной синхронизации обусловлено сменой знака изначально положительного показателя Ляпунова  $\lambda_2$ .

### 3. ОБОБЩЕННАЯ СИНХРОНИЗАЦИЯ В СЕТЯХ СВЯЗАННЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Перейдем теперь к анализу объектов более высокого уровня сложности — сетей связанных хаотических осцилляторов. В качестве модели такой сети выберем сеть из  $N = 5$  систем Ресслера со слегка различающимися значениями параметра

$\omega$ . Эволюция  $i$ -го элемента сети ( $i = 1, \dots, N$ ) описывается следующей системой уравнений:

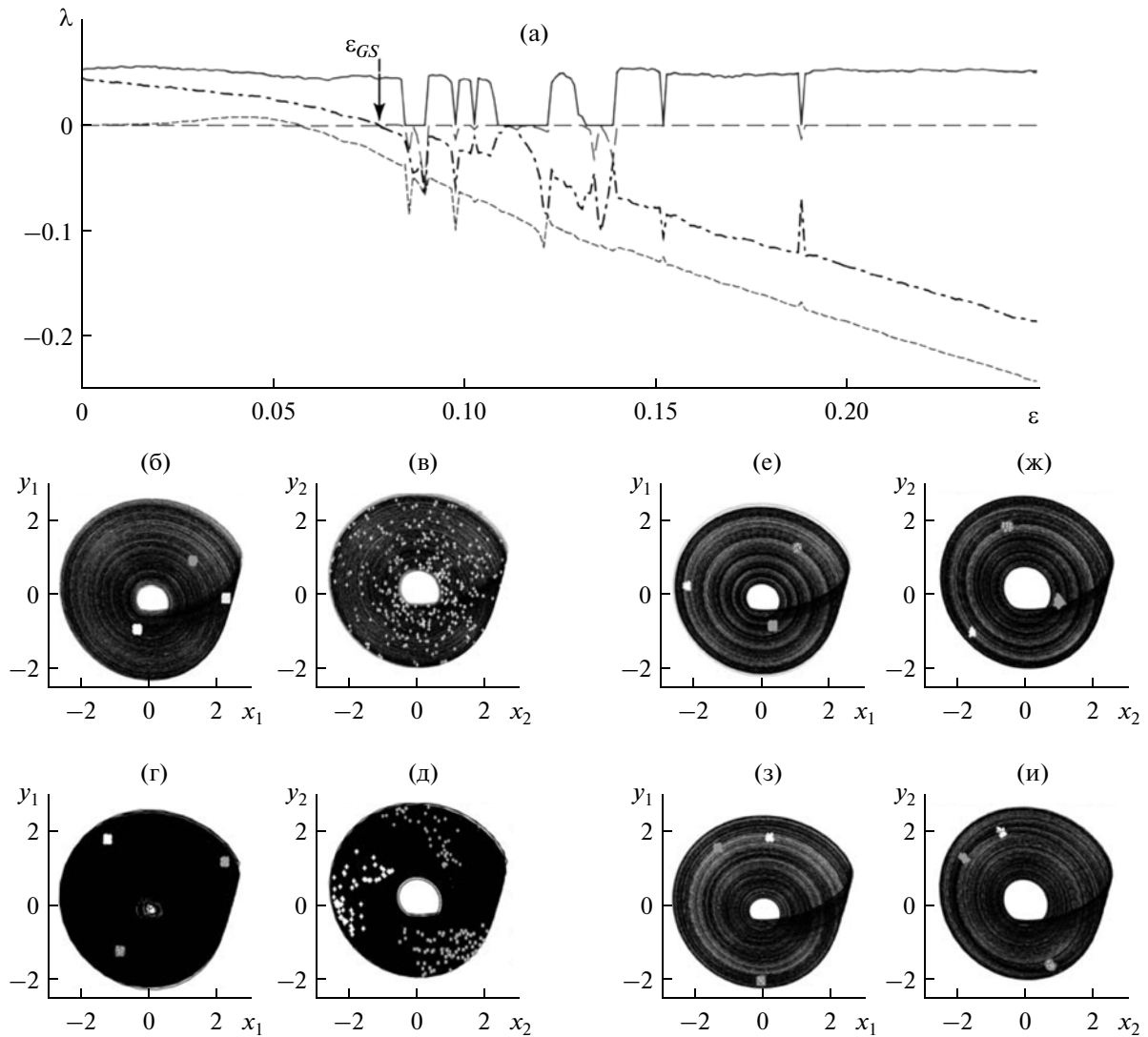
$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= -\omega_i y_i - z_i + \varepsilon \sum_{j=1}^N G_{ij} x_j, \\ \dot{y}_i &= \omega_i x_i + a y_i, \\ \dot{z}_i &= p + z_i (x_i - c), \end{aligned} \quad (9)$$

где значения управляющих параметров  $a, p, c$  выбраны такими же, как и в случае двух взаимно связанных осцилляторов (7),  $\omega_1 = 0.95$ ,  $\omega_2 = 9525$ ,  $\omega_3 = 0.955$ ,  $\omega_4 = 9575$ ,  $\omega_5 = 0.96$ ,  $\bar{x}_i(t) = (x_i, y_i, z_i)^T$  — вектор состояния  $i$ -го элемента,  $\varepsilon$  — коэффициент связи между элементами,  $G_{ij}$  — элемент матрицы связи  $\mathbf{G}$  сети,  $\mathbf{G}$  — матрица, аналогичная описанной в разделе 1. Топология связей между элементами сети была выбрана таким образом, чтобы каждый элемент сети оказывался связанным со всеми остальными элементами.

Динамика сети, узлы которой представлены  $N$  осцилляторами Ресслера (9) характеризуется  $3N$  показателями Ляпунова. В отсутствие связей между элементами сети  $N$  показателей оказываются положительными,  $N$  — отрицательными и  $N$  — нулевыми. При увеличении параметра связи  $\varepsilon$  нулевые ляпуновские показатели, так же как и положительные, постепенно переходят в область отрицательных значений. Зависимость семи старших показателей Ляпунова от параметра связи  $\varepsilon$  для сети из пяти осцилляторов Ресслера приведена на рис. 6.

Видно, что при  $\varepsilon_{LE} \approx 0.0385$  второй показатель Ляпунова  $\lambda_2$  становится отрицательным. Следо-





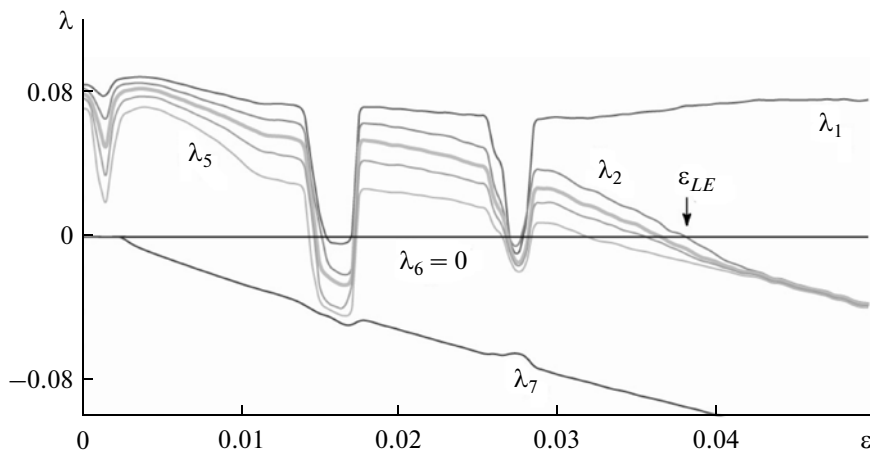
**Рис. 5.** Зависимость четырех старших ляпуновских показателей (а) от параметра связи  $\varepsilon$  для системы (8),  $\omega_1 = 1.09$ . Критическое значение параметра связи  $\varepsilon_{GS} = 0.078$  (момент перехода одного из положительных ляпуновских показателей в область отрицательных значений) показан стрелкой. Области параметров, где максимальный показатель Ляпунова обращается в нуль, соответствует окнам периодичности, возникающим в системе взаимно связанных осцилляторов. б–и – Фазовые портреты генераторов на туннельном диоде для различных значений параметра связи: (б, в)  $\varepsilon = 0.02$  (асинхронное состояние); (г, д)  $\varepsilon = 0.071$  (режим, близкий к фазовой синхронизации); (е, ж)  $\varepsilon = 0.10$  (режим обобщенной синхронизации); (з, и)  $\varepsilon = 0.18$  (режим, близкий к синхронизации с запаздыванием). На рис. (б, г, е, з) приведены хаотические аттракторы первой системы  $\vec{x}(t)$  с тремя случайно выбранными точками  $\vec{x}^k$  и их ближайшими соседями  $\vec{x}^{kn}$ ; на рис. (в, д, ж, и) – соответствующие им состояния  $\vec{u}^{k, kn}$  в фазовом пространстве второй системы  $\vec{u}(t)$ .

вательно, при значениях параметра связи  $\varepsilon > \varepsilon_{LE}$  должен иметь место режим обобщенной синхронизации.

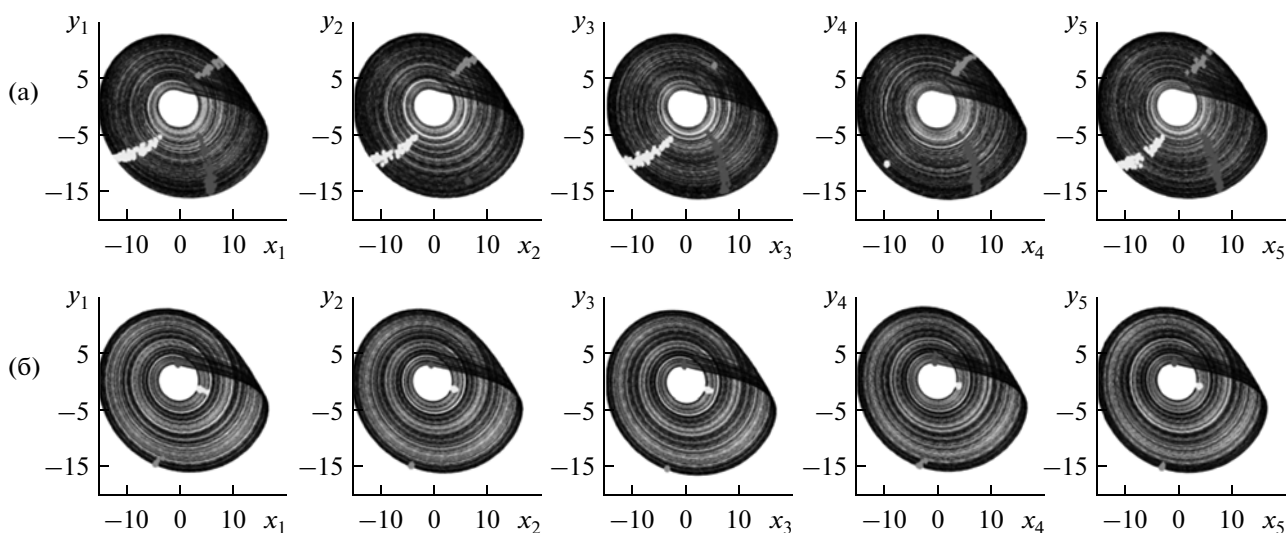
Чтобы подтвердить наличие обобщенной синхронизации в исследуемой сети, по аналогии со случаем двух взаимно связанных систем мы использовали метод ближайших соседей. На рис. 7 приведены фазовые портреты всех осцилляторов Ресслера сети для двух различных значений пара-

метра связи, ниже (рис. 7а,  $\varepsilon = 0.03$ ) и выше (рис. 7б,  $\varepsilon = 0.04$ ) критического значения  $\varepsilon_{LE}$ .

На фазовых портретах трех систем  $\vec{x}_i(t)$ ,  $i = 2 \dots 4$  случайным образом выбирались три точки (одна для каждой системы) и находились их ближайшие соседи – соответствующие им точки во всех остальных связанных системах. При  $\varepsilon = 0.03$  (рис. 7а) точки сосредоточены в ограниченной области аттрактора и распределены вдоль радиу-



**Рис. 6.** Зависимость семи старших показателей Ляпунова от параметра связи  $\varepsilon$  для сети из пяти осцилляторов Ресслера (9); момент возникновения режима обобщенной синхронизации в сети  $\varepsilon_{LE} = 0.0385$  показан стрелкой.



**Рис. 7.** Фазовые портреты пяти осцилляторов Ресслера для двух различных значений параметра связи: а)  $\varepsilon = 0.03$  (режим фазовой синхронизации); б)  $\varepsilon = 0.04$  (режим обобщенной синхронизации).

са, что свидетельствует о существовании режима фазовой синхронизации и отсутствии обобщенной синхронизации. При  $\varepsilon > \varepsilon_{LE}$  (рис. 7б) все состояния всех систем оказываются близкими, что свидетельствует о существовании режима обобщенной синхронизации.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе проведено исследование режима обобщенной синхронизации в системах с взаимной связью. Предложена универсальная концепция обобщенной синхронизации, справедливая как для двух однонаправленно и взаимно связанных хаотических осцилляторов, так и для сложных сетей. Показано, что возникновение

режима обобщенной синхронизации во взаимодействующих трехмерных динамических системах связано с переходом второго ляпуновского показателя в область отрицательных значений. Поэтому режим обобщенной синхронизации может быть интерпретирован как переход от гиперхаотических колебаний к хаотическим. Полученные результаты подтверждены при помощи метода ближайших соседей. Важно отметить, что метод вспомогательной системы, широко используемый для диагностики обобщенной синхронизации, для взаимно связанных систем приводит к некорректным результатам. Так как предложенная теория оказывается справедливой для различных систем, можно ожидать, что аналогич-

ный механизм будет иметь место в системах различной природы.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации (соглашение 14.В37.21.0751), Совета по грантам при Президенте Российской Федерации (программа государственной поддержки молодых ученых – кандидатов и докторов наук, гранты МК-672.2012.2, МД-345.2013.2), Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 12-02-00221-а) Государственного задания Минобрнауки РФ высшим учебным заведениям на 2012–2014 гг., а также ФНП “Династия”.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Rulkov N.F., Sushchik M.M., Tsimring, L.S., Abarbanel H.D.I.* // Phys. Rev. E. 1995. V. 51. № 2. P. 980.
2. *Пиковский А.С., Розенблюм М.Г., Куртс Ю.* Синхронизация. Фундаментальное нелинейное явление. М.: Техносфера, 2003.
3. *Анищенко В.С., Астахов В.В., Вадивасова Т.Е., Стрелкова Г.И.* Синхронизация регулярных, хаотических и стохастических колебаний. М.; Ижевск: Научно-издат. центр “Регулярная и хаотическая динамика”, 2008.
4. *Zheng Z., Wang X., Cross M. C.* // Phys. Rev. E. 2002. V. 65. № 5. P. 6211.
5. *Guan S., Wang X., Gong X., et al.* // CHAOS. 2009. V. 19. № 1. P. 3130.
6. *Hung Y.-C., Huang Y.-T., Ho M.-C., Hu C.-K.* // Phys. Rev. E. 2008. V. 77. № 1. P. 6202.
7. *Abarbanel H.D.I., Rulkov N.F., Sushchik M.M.* // Phys. Rev. E. 1996. V. 53. № 5. P. 4528.
8. *Hramov A.E., Koronovskii A.A.* // Phys. Rev. E. 2005. V. 71. № 6. P. 7201.
9. *Короновский А.А., Москаленко О.И., Храмов А.Е.* // ЖТФ. 2006. Т. 76. № 2. С. 1.
10. *Pyragas K.* // Phys. Rev. E. 1997. V. 56. № 5. P. 5183.
11. *Rosenblum M.G., Pikovsky A.S., Kurths J.* // Phys. Rev. Lett. 1997. V. 78. № 22. P. 4193.
12. *Pyragas K.* // Phys. Rev. E. 1996. V. 54. № 5. P. R4508.
13. *Parlitz U., Junge L., Lauterborn W., Kocarev L.* // Phys. Rev. E. 1996. V. 54. № 2. P. 2115.
14. *Hramov A.E., Khramova A.E., Koronovskii A.A., Boccaletti S.* // Int. J. Bifurcation and Chaos. 2008. V. 18. № 3. P. 258.
15. *Boccaletti S., Valladares D.L.* // Phys. Rev. E. 2000. V. 62. № 5. P. 7497.
16. *Короновский А.А., Куровская М.К., Москаленко О.И., Храмов А.Е.* // ЖТФ. 2007. Т. 77. № 1. С. 21.