

УДК 517.9

## ОБОБЩЕННАЯ СИНХРОНИЗАЦИЯ В СЕТЯХ СВЯЗАННЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

© А.А. Короновский, О.И. Москаленко, А.С. Павлов, А.Е. Филатова,  
А.Е. Храмов, М.В. Храмова, С.А. Шурыгина

*Ключевые слова:* обобщенная синхронизация; сложные сети; топология сети; ляпуновская экспонента; метод ближайших соседей.

Проведено исследование обобщенной синхронизации в сетях со сложной топологией межэлементных связей, в узлах которых находятся хаотические динамические системы. Показано, что диагностирование обобщенной синхронизации в данном случае возможно по моменту перехода второго по старшинству показателя Ляпунова в область отрицательных значений. Полученные результаты подтверждены при помощи метода ближайших соседей. Установлено, что топология сети оказывает существенное влияние на установление обобщенной синхронизации.

Исследование хаотической синхронизации связанных динамических систем представляется в настоящее время одним из актуальных направлений радиофизики и нелинейной динамики [1]. В простейшем случае явление хаотической синхронизации может наблюдаться в двух связанных нелинейных системах. В последнее время внимание исследователей привлекает изучение взаимодействия большого числа нелинейных систем – сетей [2]. При этом особое внимание исследователей сосредоточено на анализе сложных сетей, структура которых нерегулярна, характеризуется большой разнородностью в мощности межэлементной связи, а элементы демонстрируют хаотическое поведение [3]. Интерес к изучению подобных сетей связан как с необходимостью анализа разнообразных природных, социальных и технических объектов, так и с важностью изучения фундаментальных аспектов явления хаотической синхронизации в системе многих связанных парциальных систем.

В настоящее время различают несколько типов хаотической синхронизации в сложных сетях. Это, прежде всего, полная синхронизация [4–5], фазовая синхронизация [3], обобщенная синхронизация [6], кластерная синхронизация [7] и др., и если полная, фазовая и кластерная синхронизации в сложных сетях в настоящее время изучены достаточно хорошо, то исследование обобщенной синхронизации в таких системах находится лишь в самом начале своего развития. Известные работы направлены лишь на установление факта существования этого режима, в то время как теория обобщенной синхронизации для таких систем, как правило, даже не затрагивается. Более того, во всех известных работах диагностика обобщенной синхронизации производится при помощи модификации метода вспомогательной системы [8], являющегося эффективным средством анализа обобщенной синхронизации в системах с однонаправленной связью, однако, подобная модификация даже для двух взаимно связанных систем приводит к некорректным результатам [9–10].

В настоящей работе излагаются основные моменты концепции обобщенной синхронизации в сложных сетях. Как будет показано ниже, диагностирование обобщенной синхронизации в таких системах можно осуществлять путем расчета спектра ляпуновских экспонент для исследуемой сети. Важно отметить, что рассмотренные ранее случаи двух однонаправленно и взаимно связанных систем [11–12] могут быть рассмотрены как частные случаи предложенной концепции, что свидетельствует об ее универсальности.

Также как и в случае двух однонаправленно и взаимно связанных систем [9, 13], под обобщенной синхронизацией сети связанных нелинейных элементов будем понимать установление уникального функционального соотношения между элементами этой сети, т. е.

$$\mathbf{F}[\mathbf{x}_1(t), \mathbf{x}_2(t), \dots, \mathbf{x}_i(t), \dots, \mathbf{x}_N(t)] = 0, \quad (1)$$

где  $\mathbf{x}_i(t)$  – вектор состояния  $i$ -го элемента;  $N$  – число элементов сети. Рассмотрим механизмы возникновения обобщенной синхронизации в сложных сетях с диссипативным характером связей между элементами. Предположим, что в узлах сети находятся трехмерные динамические системы<sup>1</sup>, демонстрирующие хаотическую динамику, состояние каждой из которых характеризуется вектором состояния  $\mathbf{x}_i = (x_i, y_i, z_i)$ , где  $i = \overline{1, N}$ , при этом элементы сети могут быть неидентичными. Для выявления механизмов возникновения обобщенной синхронизации такой сети ее состояние удобно характеризовать одним вектором  $\mathbf{U} = (u_1, u_2, \dots, u_i, \dots, u_{3N})^T$ , где  $u_{3i-2} = x_i$ ,  $u_{3i-1} = y_i$ ,

<sup>1</sup> Отметим, что рассуждения, приведенные ниже, могут быть обобщены на системы с произвольной размерностью фазового пространства. Для простоты ограничимся трехмерным фазовым пространством.

$u_{3i} = z_i$ . В этом случае эволюция сложной сети будет определяться уравнением:

$$\dot{\mathbf{U}} = \mathbf{L}(\mathbf{U}) + \varepsilon \tilde{\mathbf{G}}\mathbf{U}, \quad (2)$$

где  $\mathbf{L}(\cdot)$  – вектор эволюции узлового элемента сети в отсутствие связи, слагаемое  $\varepsilon \tilde{\mathbf{G}}$  описывает влияние топологии сети и силы межэлементных связей. Матрица  $\tilde{\mathbf{G}}$ , характеризующая структуру диссипативных связей между элементами сети, – симметричная матрица, сумма элементов  $G_{ij}$  в каждой строке которой равна 0;  $\tilde{G}_{ii} = -\sum_{j \neq i} \tilde{G}_{ij}$  (условие диссипативности), причем  $\tilde{G}_{ij} = 1$  ( $i \neq j$ ), если  $u_i$  воздействует на  $u_j$ , и равно 0 в противном случае. Отметим, что все элементы матрицы  $\tilde{G}_{ij}$  являются положительными или равными нулю за исключением диагональных элементов  $\tilde{G}_{ii}$  (они отрицательны либо равны нулю).

Нетрудно заметить, что слагаемое  $\varepsilon \tilde{\mathbf{G}}\mathbf{U}$  вносит дополнительную диссипацию в систему (2). Действительно, об уровне диссипации и скорости сжатия фазового объема в рассматриваемой системе свидетельствует дивергенция векторного поля:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V} \frac{\Delta V}{\Delta t} = \text{div} \mathbf{L} + \varepsilon \sum_{i=1}^{3N} \tilde{G}_{ii}, \quad (3)$$

где  $\Delta V$  – элементарный объем фазового пространства системы (2). Так как  $\tilde{G}_{ii} \leq 0$ , слагаемое  $\varepsilon \sum_{i=1}^{3N} \tilde{G}_{ii}$  также отрицательно. Следовательно, с ростом параметра связи  $\varepsilon$  увеличивается диссипация в рассматриваемой сети, что приводит к упрощению хаотической динамики системы (2) [14–15].

Для характеристики сложности хаотического движения обычно рассчитывается спектр ляпуновских экспонент. В рассматриваемом случае поведение системы (2) описывается набором  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_{3N}$  показателей Ляпунова, причем для  $\varepsilon = 0$   $N$  старших из них должны быть положительными. При увеличении диссипации в системе изначально положительные ляпуновские экспоненты постепенно становятся отрицательными. После перехода  $\lambda_2$  в область отрицательных значений «степень хаотичности» становится минимальной, в системе остается только один положительный показатель Ляпунова, что и соответствует установлению режима обобщенной синхронизации. Понятно, что в данном случае режим обобщенной синхронизации может быть интерпретирован как переход от гиперхаотических колебаний к хаотическим. Отметим также, что отрицательность второго показателя Ляпунова  $\lambda_2$  как критерий существования обобщенной синхронизации согласуется с аналогичным критерием, используемым для диагностики обобщенной синхронизации в однонаправленно [11, 14] и взаимно [9, 12, 16] связанных системах.

Рассмотрим поведение сети из  $N = 5$  систем Рес-

слера со слегка различающимися значениями управляющих параметров. Эволюция  $i$ -го элемента сети ( $i = 1, \dots, N$ ) описывается следующей системой уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= -\omega_i y_i - z_i + \varepsilon \sum_{j=1}^N G_{ij} x_j; \\ \dot{y}_i &= \omega_i x_i + a y_i; \\ \dot{z}_i &= p + z_i (x_i - c), \end{aligned} \quad (4)$$

где  $a = 0,15$ ,  $p = 0,2$ ,  $c = 10$ ,  $\omega_1 = 0,95$ ,  $\omega_2 = 0,9525$ ,  $\omega_3 = 0,955$ ,  $\omega_4 = 0,9575$ ,  $\omega_5 = 0,96$  – управляющие параметры;  $\varepsilon$  – коэффициент связи между элементами;  $G_{ij}$  – элемент матрицы связи  $\mathbf{G}$  сети. Топология связей между элементами сети для простоты была выбрана таким образом, что каждый элемент сети оказывался связанным со всеми остальными элементами.

Динамика сети (4) характеризуется  $3N$  показателями Ляпунова. В отсутствие связей между элементами сети  $N$  из показателей оказываются положительными,  $N$  – отрицательными и  $N$  – нулевыми. При увеличении параметра связи  $\varepsilon$  нулевые ляпуновские показатели, также как и положительные, постепенно переходят в область отрицательных значений. Зависимость семи старших показателей Ляпунова от параметра связи  $\varepsilon$  для сети из пяти осцилляторов Ресслера приведена на рис. 1. Видно, что при  $\varepsilon_{LE} \approx 0,0385$  вторая ляпуновская экспонента  $\lambda_2$  становится отрицательной. Следовательно, при значениях параметра связи  $\varepsilon > \varepsilon_{LE}$  должен иметь место режим обобщенной синхронизации.

Полученные результаты хорошо согласуются с методом ближайших соседей [13]. В основу метода ближайших соседей положено утверждение о том, что наличие функционального соотношения между состояниями взаимодействующих систем означает, что все близкие состояния в фазовом пространстве одной из систем соответствуют близким состояниям в фазовом пространстве других систем. На рис. 2 приведены фазовые портреты всех осцилляторов Ресслера сети для двух различных значений параметра связи, ниже (рис. 2а,  $\varepsilon = 0,03$ ) и выше (рис. 2б,  $\varepsilon = 0,04$ ) критического значения  $\varepsilon_{LE}$ .

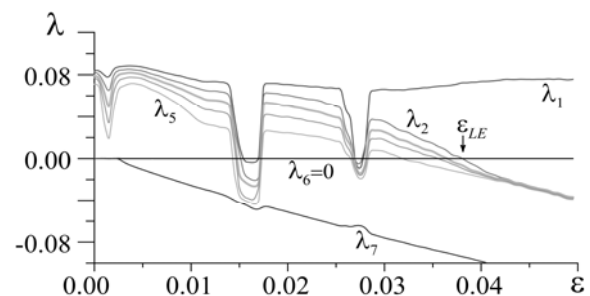
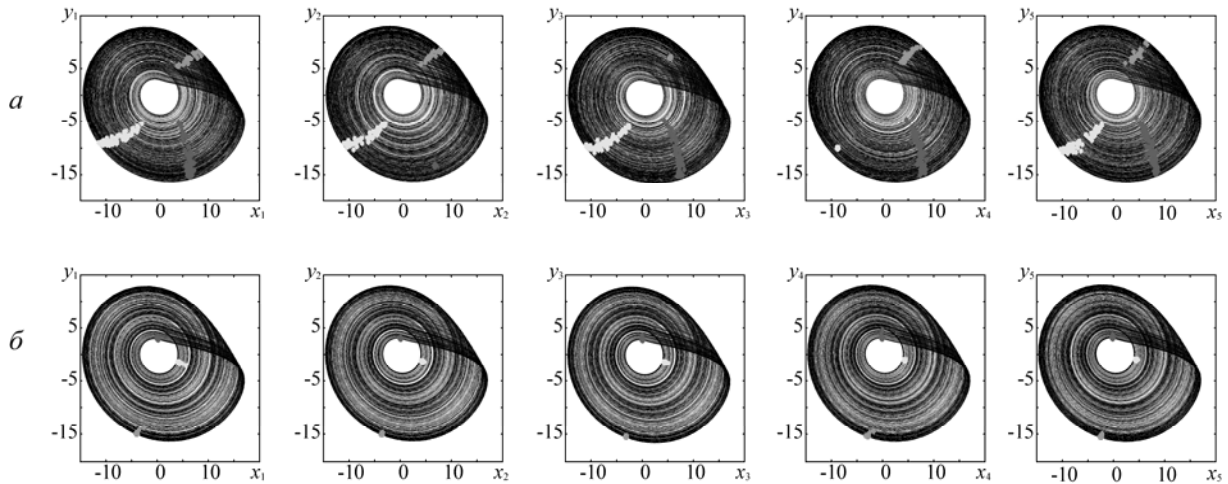


Рис. 1. Зависимость семи старших показателей Ляпунова от

параметра связи  $\varepsilon$  для сети из пяти осцилляторов Ресслера (4). Момент возникновения режима обобщенной синхронизации в сети  $\varepsilon_{LE} = 0,0385$  показан стрелкой

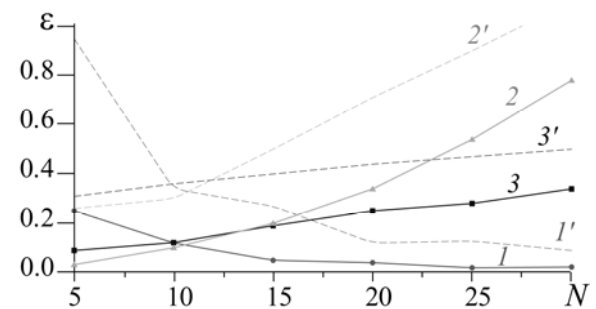


**Рис. 2.** Фазовые портреты пяти осцилляторов Ресслера для двух различных значений параметра связи: (а)  $\varepsilon = 0,03$  (режим фазовой синхронизации) и (б)  $\varepsilon = 0,04$  (режим обобщенной синхронизации)

На фазовых портретах трех систем  $x_i(t)$ ,  $i = 2 \div 4$  случайным образом выбирались три точки (одна для каждой системы) и находились их ближайшие соседи и соответствующие им точки во всех остальных связанных системах. При  $\varepsilon = 0,03$  (рис. 2а) точки сосредоточены в ограниченной области аттрактора и распределены вдоль радиуса, что свидетельствует о существовании режима фазовой синхронизации и отсутствии обобщенной синхронизации. При  $\varepsilon > \varepsilon_{LE}$  (рис. 2б) все состояния всех систем оказываются близкими, что говорит о существовании режима обобщенной синхронизации.

Таким образом, диагностирование обобщенной синхронизации в сетях связанных нелинейных элементов возможно по моменту перехода второго (положительного) показателя Ляпунова в область отрицательных значений. В заключение рассмотрим вопрос о влиянии числа элементов и топологии сети на установление обобщенной синхронизации. На рис. 3 приведены границы обобщенной синхронизации (сплошные линии) на плоскости параметров «число элементов сети – параметр связи» для сетей с различной топологией межэлементных связей (случайной сети (кривая 1), регулярной сети (кривая 2), сети типа «малый мир» («small-world») (кривая 3)). Для всех рассмотренных случаев значения управляющих параметров  $\omega_i$  выбирались случайным образом так, что плотность распределения вероятности  $\omega_i$  подчинялась нормальному распределению со средним  $\omega_0 = 0,95$  и дисперсией  $\Delta\omega = 0,017$ , что соответствует случаю относительно больших значений расстройки управляющих параметров. Как видно из рис. 3, топология сети оказывает существенное влияние на установление обобщенной синхронизации. В частности, порог возникновения обобщенной синхронизации уменьшается для случайной сети, а для регулярной сети и сети типа «малый мир» монотонно растет. При этом граница обобщенной

синхронизации для регулярной сети растет более быстро, чем для сети «малый мир».



**Рис. 3.** Границы возникновения режима обобщенной (сплошные линии 1, 2, 3) и полной (пунктирные линии 1', 2', 3') синхронизации на плоскости параметров «число элементов сети  $N$  – параметр связи  $\varepsilon$ » для случайной сети (кривые 1, 1'), регулярной сети (кривые 2, 2') и сети «малый мир» (кривые 3, 3')

Наряду с границами обобщенной синхронизации на рис. 3 показаны также границы полной синхронизации для тех же топологий сетей (пунктирные линии, кривые 1', 2', 3', соответственно). Как видно из рис. 3, ввиду достаточно большой расстройки управляющих параметров для всех рассмотренных случаев границы обобщенной и полной синхронизации достаточно сильно отличаются друг от друга (граница полной синхронизации лежит существенно выше обобщенной). При этом качественное поведение границ (тенденция к увеличению/уменьшению порогового значения параметра связи, характер самой зависимости) остается практически неизменным.

Таким образом, в настоящей работе проведено исследование режима обобщенной синхронизации в сетях со сложной топологией межэлементных связей. Показано, что возникновение режима обобщенной синхронизации во взаимодействующих трехмерных

динамических системах связано с переходом второй ляпуновской экспоненты в область отрицательных значений. Полученные результаты подтверждены при помощи метода ближайших соседей. Показано, что количество элементов и топология сети оказывают существенное влияние на установление обобщенной синхронизации.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. *Boccaletti S., Kurths, J., Osipov G.V., Valladares D.L., Zhou C.S.* The synchronization of chaotic systems // *Physics Reports*. 2002. V. 366. P. 1-101.
2. *Strogatz S.H.* Exploring complex networks // *Nature*. 2002. V. 410. P. 268-276.
3. *Boccaletti S., Latora V., Moreno V., Chavez M., Hwang D.-U.* Complex networks: Structure and dynamics // *Physics Reports*. 2006. V. 424. P. 175-308.
4. *Chavez M., Hwang D.-U., Amann A., Hentschel H.G.E., Boccaletti S.* Synchronization is enhanced in weighted complex networks // *Phys. Rev. Lett.* 2005. V. 94. P. 218701.
5. *Hramov A.E., Khramova A.E., Koronovskii A.A., Boccaletti S.* Synchronization in networks of slightly nonidentical elements // *IJBC*. 2008. V. 18. № 3. P. 258-264.
6. *Hung Y., Huang Y., Ho M., Hu C.* Paths to globally generalized synchronization in scale-free networks // *Phys. Rev. E*. 2008. V. 77. № 1. P. 016202.
7. *Kouomou Y.C., Woafu P.* Transitions from spatiotemporal chaos to cluster and complete synchronization states in a shift-invariant set of coupled nonlinear oscillators // *Phys. Rev. E*. 2003. V. 67. P. 046205.
8. *Abarbanel H.D.I., Rulkov N.F., Sushchik M.M.* Generalized synchronization of chaos: The auxiliary system approach // *Phys. Rev. E*. 1996. V. 53. № 5. P. 4528-4535.
9. *Moskalenko O.I., Koronovskii A.A., Hramov A.E., Shurygina S.A.* Generalized synchronization in mutually coupled dynamical systems // *Proceedings of 18th IEEE Workshop on Nonlinear Dynamics of Electronic Systems*. 2010. P. 70-73.
10. *Короновский А.А., Москаленко О.И., Шурыгина С.А.* Влияние степени взаимности связи на установление различных типов хаотической синхронизации // *Радиотехника и электроника*. 2011. Т. 56. Вып. 12. С. 1490-1500.
11. *Pyragas K.* Conditional Lyapunov exponents from time series // *Phys. Rev. E*. 1997. V. 56. № 5. P. 5183-5188.
12. *Koronovskii A.A., Moskalenko O.I., Hramov A.E.* Nearest neighbors, phase tubes, and generalized synchronization // *Phys. Rev. E*. 2011. V. 84. № 3. P. 037201.
13. *Rulkov N.F., Sushchik M.M., Tsimring L.S., Abarbanel H.D.I.* Generalized synchronization of chaos in directionally coupled chaotic systems // *Phys. Rev. E*. 1995. V. 51. № 2. P. 980-994.
14. *Hramov A.E., Koronovskii A.A.* Generalized synchronization: a modified system approach // *Phys. Rev. E*. 2005. V. 71. № 6. P. 067201.
15. *Короновский А.А., Москаленко О.И., Храмов А.Е.* О механизмах, приводящих к установлению режима обобщенной синхронизации // *ЖТФ*. 2006. Т. 76. Вып. 2. С. 1-9.
16. *Короновский А.А., Москаленко О.И., Максименко В.А., Храмов А.Е.* О возникновении обобщенной синхронизации в пучково-плазменных системах, связанных взаимно // *Письма в ЖТФ*. 2011. Т. 37. № 13. С. 40-47.

**БЛАГОДАРНОСТИ:** Работа выполнена при поддержке Федеральной целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 гг., Совета по грантам Президента Российской Федерации для государственной поддержки молодых российских ученых – кандидатов наук (проект МК-672.2012.2), Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 12-02-00221-а), а также Фонда некоммерческих программ «Династия».

Поступила в редакцию 11 июля 2012 г.

Koronovskiy A.A., Moskalenko O.I., Pavlov A.S., Filatova A.E., Khramov A.E., Khramova M.V., Shurygina S.A. GENERALIZED SYNCHRONIZATION IN NETWORKS OF COUPLED NONLINEAR ELEMENTS

We have studied the generalized synchronization in networks with the complex topology of links between nodes where chaotic dynamical systems are located. We have shown that in such case the generalized synchronization regime can be detected by the transition of the second positive Lyapunov exponent in the field of the negative values. Obtained results have been confirmed by the nearest neighbor method. We have found that the topology of the network influences sufficiently on the generalized synchronization regime onset.

*Key words:* generalized synchronization; complex networks; network topology; Lyapunov exponent; nearest neighbor method.