Прикладные задачи нелинейной теории колебаний и волн

Изв. вузов «ПНД», т. 20, № 1, 2012 УДК 517.9

МЕТОД ОЦЕНКИ СПЕКТРА ЛЯПУНОВСКИХ ПОКАЗАТЕЛЕЙ ПО ВРЕМЕННОЙ РЕАЛИЗАЦИИ

Ю.А. Передерий

В статье предложен новый метод оценки спектра ляпуновсих показателей по временной реализации. Рассматриваются и сравниваются уже известные группы методов по данной тематике. Описание метода дается на примере системы Ресслера. Также приводятся результаты численного моделирования.

Ключевые слова: Ляпуновские показатели, временные ряды, численное моделирование, алгоритм Бенеттина.

В нелинейной динамике хаос в различных системах является весьма широко распространенным явлением [1]. Множество усилий прилагают исследователи для изучения этого феномена. Изучение хаотических систем открывает новые перспективы для применения их в различных сферах деятельности, например, с помощью хаотических сигналов возможно обеспечить скрытую передачу информации.

Одним из инструментов, которые широко применяются при изучении различного рода хаотических процессов, являются ляпуновские показатели. Они используются, в частности, для детектирования режима гиперхаоса [2], для установления границы возникновения обобщенной синхронизации [3] или индуцированной шумом синхронизации [4,5]. Ляпуновские показатели представляют собой набор (спектр) действительных чисел (для удобства их упорядочивают по убыванию: $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_n$) и характеризуют степень сжатия или растяжения вдоль некоторых направлений в фазовом пространстве фазового «облака», состоящего из изображающих точек. Количество показателей равно размерности фазового пространства исследуемой системы. В частности, индикатором наличия хаотической динамики в исследуемой системе является положительное значение одного или нескольких ляпуновских показателей. Это говорит о том, что в фазовом пространстве две близкие траектории с течением времени будут удаляться друг от друга, но не будут покидать аттрактор, поскольку динамический хаос возникает в диссипативных системах.

Ляпуновские показатели можно определить аналитически только в исключительных случаях на примере простых отображений. Однако существуют процедуры численной оценки всего спектра ляпуновских показателей динамической системы, если известны уравнения, которые описывают ее эволюцию [1]. Для этого необходимо решать исходные уравнения системы совместно с набором уравнений в вариациях, описывающих эволюцию малого возмущения вблизи некоторой опорной траектории. При этом отслеживается, как изменяется модуль этих возмущений во времени с определенным интервалом и производится перенормировка и ортогонализация по Граму–Шмидту векторов возмущения. Данная процедура давно известна и широко используется для оценки спектра ляпуновских показателей.

Отдельный интерес представляет собой оценка ляпуновских показателей по временной реализации, поскольку уравнения эволюции, описывающие динамику системы во времени, как правило, неизвестны. Оценка ляпуновских показателей в таком случае представляет определенные трудности, однако в этом направлении исследований достигнуты некоторые успехи.

Существуют два основных метода оценки ляпуновских показателей по реализации. Для применения этих методов сначала следует восстановить аттрактор в фазовом пространстве некоторой размерности D методом Такенса. Первый метод [6] заключается в том, что в восстановленном фазовом пространстве ищутся две близкие траектории и отслеживается их поведение с течением времени (алгоритм Бенеттина). При этом оценка спектра ляпуновских показателей происходит аналогично оценке по исходной системе уравнений вместе с уравнениями в вариациях. К достоинствам этого метода можно отнести его относительную простоту. Но недостатком является то, что при таком подходе затруднительно определить весь спектр ляпуновских показателей, поскольку определяющую роль при рассмотрении двух близких траекторий играет старший ляпуновский показатель. Второй метод [7–9] заключается в использовании якобиана, поскольку ляпуновские показатели можно определить как собственные числа матрицы Якоби для данной системы, которая сгенерировала рассматриваемую реализацию. Достоинством этого метода является возможность оценить спектр неотрицательных ляпуновских показателей по достаточно короткой реализации, а недостатком – высокая чувствительность к шумам и ошибкам, для уменьшения которой применяются различные приемы и алгоритмы.

Адекватно оценить отрицательные ляпуновские показатели в обоих методах весьма сложно. Это связано с тем, что хаотическая динамика (нас интересует оценка спектра именно в хаотических системах) в D-мерном пространстве, как правило, почти вся происходит на $(D-1)$-мерной гиперплоскости фазового пространства. Из-за этого матрица эволюции (якобиан) становится плохо определенной, что сказывается на вычислении отрицательных ляпуновских показателей. По первому методу также сложно оценить спектр ляпуновских показателей, так как система векторов возмущений не будет ортогональной, что является необходимым условием для успешной оценки спектра. Следует отметить, что для оценки спектра ляпуновских показателей важно определить точную размерность фазового пространства, в которое восстанавливается реализация, поскольку, если восстановить аттрактор в фазовом пространстве с размерностью большей, чем реальная размерность системы, генерирующей данную реализацию, то это приведет к тому, что будут вычисляться «лишние» ляпуновские показатели, что внесет существенные ошибки в оценку остальных, «нелишних» ляпуновских показателей.

Есть еще несколько методов оценки спектра ляпуновских показателей. Часть из них или является модификацией какого-либо из двух описанных ранее методов, или основывается на этих методах [10]; другие же [11] являются оригинальными, не похожими на два основных метода, описанных ранее. Однако все эти методы не получили широкого распространения.

В данной статье предлагается новый метод оценки некоторых ляпуновских показателей по временной реализации. Предложенный метод, по сути, является модификацией алгоритма Бенеттина и основан на отслеживании нескольких близких траекторий во времени, а также на использовании весьма простых линейных преобразований над векторами возмущений. Недостатком является то, что очень сложно оценить отрицательные ляпуновские показатели. Однако, как показывает практика, наибольший интерес в исследовании системы представляют как раз старшие ляпуновские показатели, которые весьма успешно оцениваются предлагаемым методом.

Рассмотрим суть предложенного метода на примере системыРесслера. Исходная временная реализация восстанавливается методом задержек (Такенса) в пространство размерности D. Считаем, что эта размерность вложения D нам уже известна, и нас интересует лишь определение спектра ляпуновских показателей по временной реализации. Далее в восстановленном фазовом пространстве ищем точку, лежащую на восстановленном аттракторе; будем считать ее «опорной» точкой и обозначим как x_0. Затем проследим, куда отобразится данная опорная точка спустя некоторое заданное время. Обозначим ее как x'_0. Теперь зададимся некоторой величиной радиуса окрестности вблизи опорной точки x_0 и будем искать точки, лежащие в этой окрестности. Для успешного применения предложенного метода определения спектра ляпуновских показателей необходимо найти D точек, лежащих в окрестности x_0. (Поскольку в данном примере мы рассматриваем систему Ресслера, то $D = 3$). Обозначим их как x_1, x_2, x_3. После этого, анализируя существующую временную реализацию, найдем точки x'_1, x'_2, x'_3, в которые отобразятся найденные ранее точки спустя некоторое фиксированное время (рис. 1). Определим разностные векторы $\Delta x_i = (\Delta x_{ix}, \Delta x_{iy}, \Delta x_{iz})^{\mathrm{T}}$ и $\Delta x'_i = (\Delta x'_{ix}, \Delta x'_{iy}, \Delta x'_{iz})^{\mathrm{T}}$, где $\Delta x_i = x_0 - x_i$, $\Delta x'_i = x'_0 - x'_i$, $i = 1, .., D$.

Предложенный метод подразумевает, что, как и в алгоритме Бенеттина, нужно перенормировать разностные векторы $\Delta x'_i$ и найти следующие точки для расчета. Однако ввиду того, что мы имеем дело с конечной временной реализацией, после нормировки разностных векторов мы можем не найти подходящие точки для определения новых разностных векторов на следующем шаге. Поэтому введем некоторые векторы возмущений $a_i = (a_{ix},\, a_{iy},\, a_{iz})^{\mathrm{T}}$, $i = 1, .., D$. Они будут соответствовать векторам линейных возмущений, которые используются для вычисления спектра ляпуновских показателей из уравнений в вариациях [1]. На начальном этапе расчетов можно использовать вручную заданные значения, для последующих шагов вычислений – использовать значения векторов, найденные на предыдущем шаге. Суть

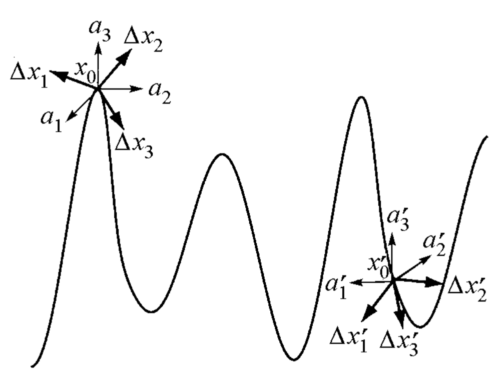

Рис. 1. Иллюстрация к описанию предложенного метода

предложенного метода, фактически, заключается в том, что существует линейная зависимость между разностными векторами Δx_i, которые находятся по временной реализации, и векторами возмущений a_i, которые являются искусственно введенными. В связи с этим, можно ввести некоторую матрицу коэффициентов $\|b_{ij}\|$, где $i, j = 1, .., D$. Далее, решим матричное уравнение следующего вида (для $D = 3$):

$$\begin{pmatrix} \Delta x_{1x} & \Delta x_{2x} & \Delta x_{3x} \\ \Delta x_{1y} & \Delta x_{2y} & \Delta x_{3y} \\ \Delta x_{1z} & \Delta x_{2z} & \Delta x_{3z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1x} & a_{2x} & a_{3x} \\ a_{1y} & a_{2y} & a_{3y} \\ a_{1z} & a_{2z} & a_{3z} \end{pmatrix}.$$

Из этого уравнения мы находим коэффициенты, с помощью которых связаны между собой наборы векторов Δx_i и a_i, $i = 1, .., D$. Целью на следующем этапе является определение векторов a'_i, в которые отобразятся исходные векторы возмущений a_i спустя некоторое время. Это можно сделать при помощи уже найденных коэффициентов b_{ij}, решая, таким образом, обратную задачу

$$\begin{pmatrix} \Delta x'_{1x} & \Delta x'_{2x} & \Delta x'_{3x} \\ \Delta x'_{1y} & \Delta x'_{2y} & \Delta x'_{3y} \\ \Delta x'_{1z} & \Delta x'_{2z} & \Delta x'_{3z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a'_{1x} & a'_{2x} & a'_{3x} \\ a'_{1y} & a'_{2y} & a'_{3y} \\ a'_{1z} & a'_{2z} & a'_{3z} \end{pmatrix}.$$

Теперь, когда мы определили, как преобразовались векторы возмущений за один шаг вычислений, мы можем вычислить их норму и применить к ним процедуру ортогонализации по Граму–Шмидту, то есть применить точно такие же операции, что и в алгоритме вычисления спектра ляпуновских показателей по известным уравнениям эволюции системы.

Дальнейшие действия состоят в нахождении новых опорных точек, определении разностных векторов и решении матричных уравнений. Этих шагов нужно сделать достаточно много, чтобы получить адекватную оценку для значений ляпуновских показателей.

Приведем результаты численного моделирования для системы Ресслера.

На рис. 2 показаны зависимости старшего (ромбы) и нулевого (крестики) ляпуновских показателей от относительного времени вычислений n. Ляпуновские показатели, вычисленные при помощи набора уравнений в вариациях, изображены линиями. Из рисунка видно, что существуют расхождения на начальном этапе вычислений. Это можно объяснить недостаточным количеством вычисленных показателей в указанный момент для статистически достоверного результата. Однако с течением времени значения ляпуновских показателей, вычисленные с помощью предложенного метода и с помощью уравнений в вариациях, начинают вести себя одинаково и выходят на некоторый уровень, соответствующий численной оценке ляпуновского показателя (в данном случае, положительного и нулевого).

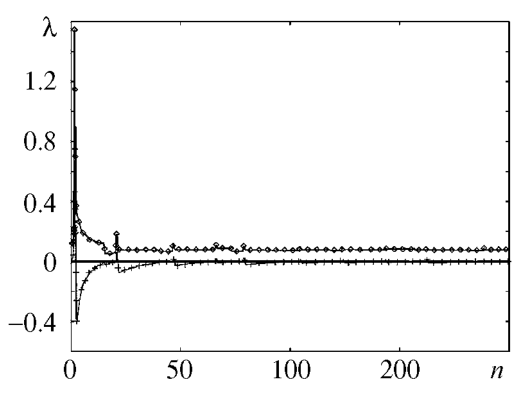

Рис. 2. Старший и нулевой показатели Ляпунова для системы Ресслера, вычисленные предложенным методом

На рис. 3 изображен младший (отрицательный) ляпуновский показатель. Видно, что его значение сильно расходится с вычисленным при помощи уравнений в вариациях. Это происходит из-за того, что структура аттрактора Ресслера является очень тонкой. Младший ляпуновский показатель отвечает как раз за сжатие фазового объема в такой «лист». Так как мы имеем временную реализацию системы Ресслера без переходного процесса, то проследить, как сильно сжимается фазовый объем внутри этого листа, технически очень сложно и может потребоваться значительное увеличение точности вычислений. Однако оценка младшего ляпуновского показателя имеет не такое большое практическое значение, как оценка старшего ляпуновского показателя, поскольку именно последний является индикатором наличия хаоса в исследуемой системе и именно его позволяет адекватно оценить предложенный метод.

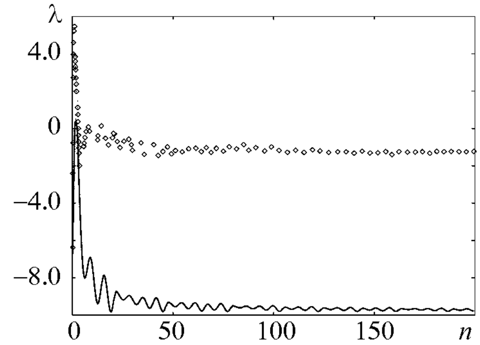

Рис. 3. Отрицательный показатель Ляпунова системы Ресслера, вычисленный предложенным методом. Видно сильное расхождение результатов моделирования с теоретическими

Таким образом, в данной статье был предложен новый метод оценки спектра ляпуновских показателей по временной реализации. Предложенный метод весьма точно оценивает все ляпуновские показатели, кроме самых младших. Особенно важно то, что он позволяет оценивать старший ляпуновский показатель, который является индикатором наличия хаоса в исследуемой системе.

Работа выполнена при поддержке федеральной целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России на 2009-2013 годы», Российского Фонда Фундаментальных Исследований (12-02-00221).

Библиографический список

1. *Кузнецов С.П.* Динамический хаос. Москва: Физматлит, 2001.
2. *Кузнецов С.П., Трубецков Д.И.* Хаос и гиперхаос в лампе обратной волны // Известия вузов. Радиофизика. 2004. Т. XLVII. № 5. С. 1.
3. *Hramov A.E., Koronovskii A.A.* Generalized synchronization: A modified system approach // Phys. Rev. E. 2005. Vol. 71, № 6. 067201.
4. *Pecora L.M., Carroll T.L., Heagy J.F.* Statistics for mathematical properties of maps between time series embeddings // Phys. Rev. E. 1995. Vol. 52, № 4. P. 3420.
5. *Hramov A. E., Koronovskii A. A., Moskalenko O. I.* Are generalized synchronization and noise-induced synchronization identical types of synchronous behavior of chaotic oscillators? // Phys. Lett. A. 2006. Vol. 354, № 5–6. P. 423.
6. *Wolf A., Swift J.B., Swinney H.L., Vastano J.A.* Determining Lyapunov exponents from a time series // Physica D. 1985. Vol. 16. P. 285.
7. *Eckmann J.-P., Kamphorst S.O., Ruelle D., Ciliberto S.* Liapunov exponents from time series // Phys. Rev. A. 1986. Vol. 34, № 6. P. 4971.

8. *Abarbanel H.D.I.* Computing the Lyapunov spectrum of a dynamical system from an observed time series // Phys. Rev. A. 1991. Vol. 43, № 6. P. 2787.
9. *Dieci L., van Vleck E.S.* Computation of a few Lyapunov exponents for continuous and discrete dynamical systems // Applied Numerical Mathematics. 1995. Vol. 17. P. 275.
10. *Lai D., Chen G.* Statistical analysis of Lyapunov exponents from time series: A Jacobian approach // Mathl. Comput. Modelling 1998. Vol. 27, № 7. P. 1.
11. *Rosenstein M.T., Collins J.J. De Luca C.J.* A practical method for calculating largest Lyapunov exponents from small data sets // Physica D. 1993. Vol. 65, № 1–2. P. 117.

Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского *Поступила в редакцию 29.12.2011*

METHOD FOR CALCULATION OF LYAPUNOV EXPONENTS SPECTRUM FROM DATA SERIES

Y.A. Perederiy

The new method for the calculating of the spectrum of the Lyapunov exponents from data series is proposed. The already known methods of the same thematic are investigated. The Roessler system is given as an example for describing the proposed method. The results of numerical modeling are presented.

Keywords: Lyapunov exponents, time series, numerical modeling, Benettin's algorithm.

Передерий Юрий Андреевич – родился в Саратове (1988), окончил Саратовский государственный университет (2010). Является аспирантом кафедры физики открытых систем факультета нелинейных процессов СГУ.

410012 Саратов, ул. Астраханская, 83
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
E-mail: arronnard@gmail.com