

УДК 517.9

ИССЛЕДОВАНИЕ НА РАЗЛИЧНЫХ ВРЕМЕННЫХ МАСШТАБАХ ПОВЕДЕНИЯ НЕАВТОНОМНОГО ОСЦИЛЛЯТОРА ВАН-ДЕР-ПОЛЯ В ПРИСУТСТВИИ ШУМА ВБЛИЗИ ГРАНИЦЫ СИНХРОНИЗАЦИИ

© 2012 г. М. О. Журавлев, А. А. Короновский, О. И. Москаленко, А. Е. Храмов

ФГБОУ ВПО “Саратовский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского”

E-mail: zhuravlevmo@gmail.com

Приведены результаты изучения перемежающегося поведения неавтономного осциллятора, находящегося вблизи границы синхронизации, на различных временных масштабах наблюдения. Показано, что ниже границы синхронизации при определенных значениях параметра связи и на определенных временных масштабах проявления перемежаемости типа I с шумом и перемежаемости кольца будут наблюдаться одновременно.

Наличие перемежаемости характерно для многих нелинейных систем и наблюдается, в частности, при переходе от периодических колебаний к хаотическим [1], а также вблизи границы возникновения различных режимов хаотической синхронизации связанных осцилляторов [2–5].

Существует определенная классификация перемежающегося поведения, в частности выделяют перемежаемость типа I–III [1, 6], on-off-перемежаемость [7], перемежаемость игольного ушка [8], перемежаемость кольца [9]. Несмотря на некоторое сходство (наличие во временном ряду двух различных режимов, чередующихся друг с другом), каждый тип перемежаемости обладает своими собственными особенностями и характеристиками (прежде всего, это зависимость средней длительности ламинарных фаз от управляющего параметра и распределение длительностей ламинарных фаз). Механизмы, приводящие к возникновению перемежающегося поведения каждого типа, также различны.

Кроме перечисленных выше типов перемежаемости возможно существование более сложного поведения системы, в котором она одновременно демонстрирует два различных типа перемежаемости. Данный тип поведения был назван “перемежаемость перемежаемостей” [10]. Изучению именно этого типа поведения и посвящена данная статья. Это тип перемежающегося поведения может существовать как в системе однонаправленно связанных хаотических осцилляторов, так и в осцилляторе, находящемся под внешним воздействием, в состоянии, предшествующем режиму синхронизации. При этом исследуемую систему можно рассматривать на различных временных масштабах, вводимых с помощью непрерывного вейвлетного преобразования [11, 12], в том числе и на временных масштабах, отличных от основного. Как показали результаты исследований, проведенных ра-

нее [10], для системы однонаправленно связанных осцилляторов (рассмотрение проводилось на примере систем Ресслера) в определенном диапазоне значений временных масштабов действительно сосуществуют два различных типа перемежаемости, а именно перемежаемость кольца и перемежаемость игольного ушка.

Необходимо отметить, что “перемежаемость перемежаемостей” – слабо изученный тип поведения, в связи с чем изучение этого типа поведения представляет большой интерес с фундаментальной точки зрения, так как эти исследования позволят более глубоко понять и осмыслить механизмы и природу таких фундаментальных явлений, как перемежаемость и хаотическая синхронизация.

Можно предположить, что “перемежаемость перемежаемостей” может существовать также в неавтономном периодическом осцилляторе под внешним воздействием в присутствии шума. В настоящей статье приведены результаты численного моделирования для данной системы, которые были сопоставлены с теоретическими зависимостями, получено хорошее соответствие. Данные исследования позволяют более детально понять механизмы приводящие к возникновению “перемежаемости перемежаемостей”.

Рассмотрим неавтономный генератор Ван-дер-Поля, на который оказывается некоторое случайное воздействие $D\xi(t)$, где $\xi(t)$ – дельта-коррелированный белый шум [$\langle \xi(t) \rangle = 0$, $\langle \xi(t)\xi(\tau) \rangle = \delta(t - \tau)$]. Уравнение, описывающее динамику такой системы, имеет следующий вид:

$$\ddot{x} - (\lambda - x^2)\dot{x} + x = A \sin(\omega_e t) + D\xi(t), \quad (1)$$

где A – амплитуда внешнего гармонического воздействия, ω_e – его частота. Значения управляющих параметров были выбраны следующими: $\lambda = 0.1$,

$\omega_e = 0.98$. При таком наборе параметров и нулевом уровне шума ($D = 0$) динамика неавтономного генератора Ван-дер-Поля становится синхронной, когда $A = A_c = 0.0238$, что соответствует седлоузловой бифуркации на плоскости комплексных амплитуд [13]. Отметим, что исследования проводились для значений амплитуды $A > A_c$ и $D = 1$, при которых система деомнстрирует перемежаемость типа I с шумом в закритической области значений параметров.

Рассмотрение поведения неавтономного осциллятора под внешним воздействием на различных временных масштабах [11, 12] основано на введении непрерывного множества фаз исследуемых сигналов с помощью непрерывного вейвлетного преобразования

$$W(s, t_0) = \frac{1}{\sqrt{s}} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \psi^* \left(\frac{t-t_0}{s} \right) dt \quad (2)$$

с материнским вейвлетом Морле

$$\psi(n) = \frac{1}{\sqrt[4]{\pi}} \exp(j\Omega_0 n) \exp\left(-\frac{n^2}{2}\right), \quad (3)$$

где $\Omega_0 = 2\pi$.

Вейвлетная поверхность

$$W(s, t_0) = |W(s, t_0)| e^{j\varphi_s(t_0)} \quad (4)$$

характеризует поведение системы на каждом временном масштабе s в любой момент времени t_0 . Величина $|W(s, t_0)|$ характеризует наличие и интенсивность соответствующего временного масштаба s в момент времени t_0 . Кроме того, в рассмотрение вводят мгновенное значение

$$E(s, t_0) = |W(s, t_0)|^2 \quad (5)$$

и интегральное

$$\langle E(s) \rangle = \int |W(s, t_0)|^2 dt_0 \quad (6)$$

распределение энергии по временным масштабам.

При использовании вейвлетного преобразования (2) для каждого временного масштаба s можно естественным образом определить непрерывную фазу через выражение $\varphi(s, t) = \arg W(s, t)$. Говоря иначе, можно охарактеризовать поведение каждого временного масштаба s с помощью ассоциированной с ним фазы $\varphi(s, t)$, являющейся непрерывной функцией временного масштаба s и времени t . Введенное в рассмотрение таким образом семейство фаз наиболее полно характеризует поведение неавтономного осциллятора под внешним воздействием: можно описать поведение каждого временного масштаба с помощью ассоциированной с ним фазы $\varphi(s, t)$.

Рассмотрим временную реализацию $x(t)$ системы (1) и внешнее воздействие $A \sin(\omega_e t)$. Если для этой системы можно найти интервал временных масштабов $s_l \leq s \leq s_h$, для которого выполняются условие захвата фаз

$$|\varphi_x(t) - \varphi_A(t)| < \text{const} \quad (7)$$

и условие ненулевой энергии (доля энергии вейвлетного спектра, приходящаяся на данный интервал временных масштабов, оказывается отличной от нуля)

$$E_{s_{nh}} = \int_{s_l}^{s_h} \langle E(t) \rangle ds > 0, \quad (8)$$

то такой режим называется синхронизацией временных масштабов.

Для выбранных значений управляющих параметров синхронный режим устанавливается при значении параметра амплитуды внешнего гармонического воздействия $A_s \approx 0.028$, при этом синхронный режим наблюдается на временных масштабах, лежащих в диапазоне $s \in [s_l; s_h]$, $s_l = 3.98$, $s_h = 8.62$. Отметим, что исследования проводились в области значений амплитуды внешнего воздействия $A < A_s$, т.е. в системе можно диагностировать перемежаемость типа I с шумом. Временные масштабы s , на которых проводилось рассмотрение, были выбраны асинхронными, в результате чего в системе можно было наблюдать перемежаемость типа кольца.

Сопоставим количественные характеристики, полученные численно для исследуемой системы, с теоретическими зависимостями, отвечающими “перемежаемости перемежаемостей”, такие как зависимость средней длительности ламинарного поведения от параметра надкритичности и распределение длительностей ламинарных участков поведения при фиксированном значении управляющих параметров. В ходе исследований данного типа поведения в качестве критических параметров выступали амплитуда внешнего гармонического воздействия A и временной масштаб s .

Распределения длительности ламинарных фаз, полученные численно для неавтономного генератора Ван-дер-Поля под внешним воздействием, находящегося в режиме сосуществования перемежаемости типа I с шумом (в закритической области) и перемежаемости кольца, приведены на рис. 1 для трех различных наборов значений амплитуды внешнего воздействия A и временного масштаба s , на котором осуществлялось наблюдение. Поскольку механизмы, приводящие к перемежаемости кольца и перемежаемости типа I с шумом, различаются, соответственно можно разделить проскоки фазы, относящиеся к одному и другому типам перемежающегося поведения, по-

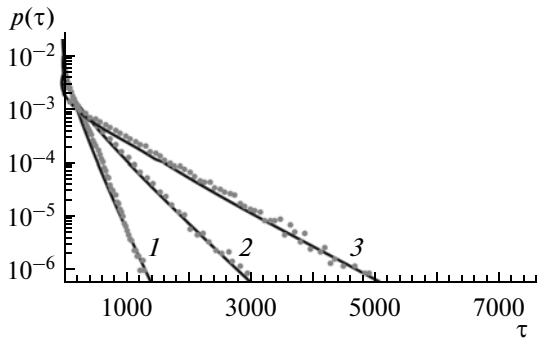


Рис. 1. Распределение длительностей ламинарных фаз для режима сосуществования перемежаемости типа I с шумом и перемежаемости кольца для неавтономного генератора Ван-дер-Поля под внешним воздействием и аналитические зависимости (9), соответствующие этим распределениям (сплошные линии). Кривая 1 – $A = 0.02308, s = 3.50, T_i = 56.0, T_r = 148.1$; кривая 2 – $A = 0.02497, s = 3.57, T_i = 120.0, T_r = 6002.9$; кривая 3 – $A = 0.02496, s = 3.8, T_i = 118.5, T_r = 2838$.

сле чего можно оценить значение T_i и T_r (T_i – значение средней длительности участка ламинарного поведения для перемежаемости типа I с шумом, T_r – значение средней длительности участка ламинарного поведения для перемежаемости кольца), входящих в теоретическое соотношение для распределения длительности ламинарных фаз при перемежаемости перемежаемостей, полученное ранее [10]:

$$p(\tau) = \frac{\exp\left(-\frac{\tau}{T_i}\right)}{(T_i + T_r)} \left(1 - \frac{\tau}{T_i}\right) \Gamma\left(0, \frac{\tau}{T_i}\right) + \frac{T_i^2 + T_r^2}{T_i T_r (T_i + T_r)} \times \exp\left(-\frac{\tau}{T_i} - \frac{\tau}{T_r}\right) + \frac{\exp\left(-\frac{\tau}{T_i}\right)}{(T_i + T_r)} \left(1 - \frac{\tau}{T_r}\right) \Gamma\left(0, \frac{\tau}{T_r}\right). \quad (9)$$

Из рис. 1 можно видеть, что полученные численные распределения длительности ламинарных фаз очень хорошо согласуются с теоретической кривой (9), что позволяет говорить о наличии в системе “перемежаемости перемежаемостей”.

Еще одна характеристика перемежающегося поведения – зависимость средней длительности ламинарного поведения $\langle \tau \rangle$ от параметра надкритичности. На рис. 2 представлено сравнение численных результатов с теоретической кривой, которая также известна для “перемежаемости перемежаемостей” [9] и выражается следующей формулой:

$$\langle \tau \rangle = \frac{T_i^2 \lg\left(\frac{T_i + T_r}{T_i}\right) - 2 T_i T_r + T_i^2 \lg\left(\frac{T_i + T_r}{T_i}\right)}{T_i + T_r}. \quad (10)$$

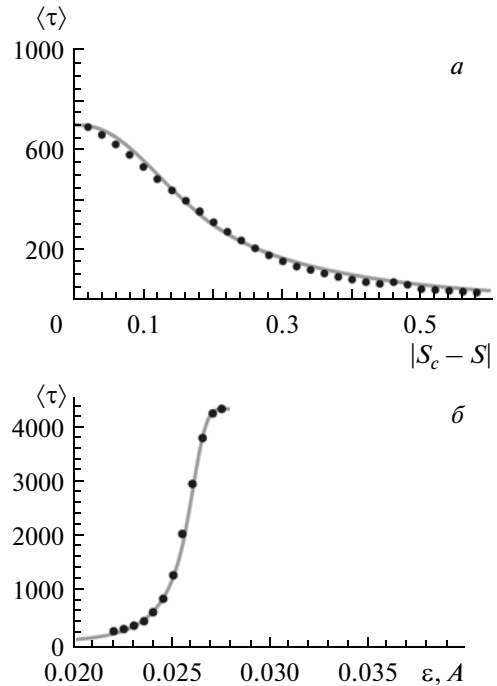


Рис. 2. Зависимость средней длительности ламинарных участков поведения от параметра надкритичности, точками показаны численные результаты, линией – аппроксимирующая кривая (10): а) в качестве параметра надкритичности выступает $(s_c - s)$, при этом амплитуда внешнего воздействия была равна 0.0230; б) в качестве параметра надкритичности выступает амплитуда внешнего воздействия A , при этом временной масштаб был выбран следующий: 3.97.

Из рис. 2 видно, что численные результаты хорошо соотносятся с теоритическими кривыми (10) как для случая, когда в качестве параметра надкритичности выступает временной масштаб s (рис. 2а), так и для случая, когда параметром надкритичности является $(A_s - A)$ (рис. 2б).

Из результатов, приведенных в данной статье, видно, что для периодического осциллятора, находящегося под внешним периодическим воздействием, возможно существование перемежающегося поведения, состоящего из двух различных типов перемежаемостей, т.е. в системе реализуется “перемежаемость перемежаемостей”. Также показано, что “перемежаемость перемежаемостей”, которая реализуется в неавтономной периодической системе с шумом, подчиняется тем же самым теоритическим законам, что и хаотические осцилляторы [10]. Можно ожидать, что данный тип поведения характерен для широкого круга нелинейных систем, демонстрирующих режим синхронизации временных масштабов.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 12-02-00221), Фонда некоммерческих программ “Династия”, ФЦП “Научные и научно-

педагогические кадры инновационной России” на 2009–2013 годы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Dubois M., Rubio M., Bergè P.* // Phys. Rev. Lett. 1983. V. 51. P. 1446.
2. *Boccaletti S., Valladares D.L.* // Phys. Rev. E. 2000. V. 62. № 5. P. 7497.
3. *Boccaletti S., Kurths J., Osipov G.V. et al.* // Phys. Rep. 2002. V. 366. P. 1.
4. *Hramov A.E., Koronovskii A.A.* // Europhys. Lett. 2005. V. 70. № 2. P. 169.
5. *Hramov A.E., Koronovskii A.A., Levin Yu.I.* // ЖЭТФ. 2005. V. 127. № 4. P. 886.
6. *Bergè P., Pomeau Y., Vidal Ch.* L'ordre dans le chaos. Paris: Hermann, 1988.
7. *Platt N., Spiegel E.A., Tresser C.* // Phys. Rev. Lett. 1993. V. 70. № 3. P. 279.
8. *Pikovsky A.S., Osipov G.V., Rosenblum M.G. et al.* // Phys. Rev. Lett. 1997. V. 79. № 1. P. 47.
9. *Hramov A.E., Koronovskii A.A., Kurovskaya M.K., Boccaletti S.* // Phys. Rev. Lett. 2006. V. 97. 114101.
10. *Журавлев М.О., Короновский А.А., Москаленко О.И., Храмов А.Е.* // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2011. Т. 19. С. 1.
11. *Hramov A.E., Koronovskii A.A.* // Chaos. 2004. V. 14. № 3. P. 603.
12. *Hramov A.E., Koronovskii A.A.* // Physica D. 2005. V. 206. № 3–4. P. 252.
13. *Pikovsky A.S., Rosenblum M.G., Kurths J.* // Int. J. Bifurcation and Chaos. 2000. V. 10. № 10. P. 2291.