

УДК 517.9

СИЛЬНАЯ И СЛАБАЯ ОБОБЩЕННАЯ ХАОТИЧЕСКАЯ СИНХРОНИЗАЦИЯ

© 2012 г. А. А. Короновский^{1,2}, О. И. Москаленко^{1,2}, С. А. Шурыгина¹, А. Е. Храмов^{1,2}

E-mail: shuryginasa@gmail.com

Уточнена существующая концепция сильной и слабой синхронизации в дискретных отображениях. Показано, что векторы состояний взаимодействующих систем связаны друг с другом функциональным соотношением только в режиме сильной синхронизации, в то время как для слабой синхронизации во внимание должна быть принята также предыстория. Предложен подход для определения порога возникновения обобщенной синхронизации в таких системах.

Хаотическая синхронизация нелинейных динамических систем — это универсальное явление, имеющее большое фундаментальное и практическое значение в различных областях науки и техники [1–3]. Синхронизация может наблюдаться не только в физических, но и в физиологических, биологических, социальных, химических и других системах. В настоящее время выделяют достаточно большое число различных типов синхронного поведения. Одним из наиболее интересных из них является режим обобщенной хаотической синхронизации [4–7].

Режим обобщенной синхронизации традиционно вводят в рассмотрение для системы двух однонаправленно связанных хаотических осцилляторов [4, 8–10] и означает, что между состояниями этих систем после завершения переходного процесса устанавливается некоторое функциональное соотношение [4]. Вид этого функционального соотношения может быть достаточно сложным, а процедура ее нахождения — весьма нетривиальной. По виду функционального соотношения — гладкое или фрактальное [10] — выделяют соответственно сильную и слабую обобщенную синхронизацию [10]. Режим сильной синхронизации соответствует гладкой зависимости координат ведущей и ведомой систем (данный режим наблюдается в случае полной синхронизации или синхронизации с запаздыванием), в то время как в случае слабой обобщенной синхронизации наблюдается фрактальная зависимость. В последнем случае в качестве взаимодействующих осцилляторов могут выступать две разные динамические системы, в том числе и с различной размерностью фазового пространства, а диагностику синхронного режима проводят, как правило, при помощи метода вспомогательной системы [11].

¹ ФГБОУ ВПО «Саратовский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского».

² ФГБОУ ВПО «Саратовский государственный технический университет имени Ю.А. Гагарина».

В настоящей работе показана необходимость пересмотра и уточнения существующей концепции сильной и слабой обобщенной хаотической синхронизации дискретных отображений. Основная причина пересмотра связана с тем, что сама концепция обобщенной синхронизации таких систем также нуждается в уточнении [12]. Как будет показано ниже, в некоторых случаях векторы состояний взаимодействующих хаотических систем в режиме обобщенной синхронизации оказываются связанными друг с другом таким образом, что предыстория состояния систем должна также приниматься во внимание.

Рассмотрим поведение двух однонаправленно связанных дискретных отображений

$$\begin{aligned}\bar{x}_{n+1} &= \mathbf{H}(\bar{x}_n, \bar{g}_x), \\ \bar{y}_{n+1} &= \mathbf{G}(\bar{y}_n, \bar{g}_y) + \sigma \mathbf{P}(\bar{x}_n, \bar{y}_n),\end{aligned}\quad (1)$$

с точки зрения установления режима обобщенной синхронизации. Здесь \bar{x}_n [\bar{y}_n] — векторы состояний ведущей [ведомой] систем, \mathbf{H} и \mathbf{G} — операторы эволюции, определяющие векторные поля рассматриваемых систем, \bar{g}_x и \bar{g}_y — векторы параметров, слагаемое \mathbf{P} отвечает за однонаправленную связь между системами, а параметр σ определяет силу связи между ними. Аналогичная ситуация была рассмотрена для потоковых систем в нашей работе [12].

Как упоминалось выше, режим обобщенной хаотической синхронизации означает наличие функционального соотношения

$$\bar{y}_n = \mathbf{F}[\bar{x}_n], \quad (2)$$

между состояниями ведущей \bar{x}_n и ведомой \bar{y}_n систем [4, 10]. Далее без потери общности будем предполагать, что размерности фазового пространства взаимодействующих систем одинаковы и равны m .

В нашей работе [12] было показано, что в некоторых случаях состояния взаимодействующих потоковых систем, находящихся в режиме обобщенной синхронизации, целесообразно рассматривать связанными друг с другом функционалом, а не функциональным соотношением. Это означает, что состояние ведомой системы зависит не только от состояния ведущей системы, но и от предыстории поведения ведущего осциллятора на протяжении некоторого времени τ . Так как понятие обобщенной синхронизации изначально было введено в рассмотрение для хаотических осцилляторов независимо от их типа, а дискретные отображения в целом ряде случаев могут быть получены из потоковых систем путем построения сечения Пуанкаре, можно предположить, что аналогичное поведение будет наблюдаться и для систем с дискретным временем. Другими словами, уравнение (2) для дискретных отображений должно быть следующим:

$$\bar{y}_n = \mathbf{F}[\bar{x}_n, \bar{x}_{n-1}, \dots, \bar{x}_{n-K}], \quad (3)$$

где K – дискретная длина предыстории, достаточная для однозначного определения состояния ведомого отображения \bar{y}_n .

Пусть \bar{x}_N и \bar{y}_N – опорные траектории хаотических аттракторов ведущего и ведомого отображений, находящихся в режиме обобщенной синхронизации соответственно. Предположим также, что $\delta\bar{y}_{Jk} = \bar{y}_{J-k} - \bar{y}_{N-k}$ и $\delta\bar{x}_{Jk} = \bar{x}_{J-k} - \bar{x}_{N-k}$ ($k = 0, \dots, K$) – векторы, характеризующие отклонения рассматриваемых траекторий \bar{x}_{J-k} и \bar{y}_{J-k} от опорных состояний \bar{x}_{N-k} и \bar{y}_{N-k} . Для соседней траектории \bar{x}_J ведущего отображения, удовлетворяющей соотношению $\|\delta\bar{x}_J\| = \|\delta\bar{x}_{J0}\| < \varepsilon$, ее образ \bar{y}_J в ведомой системе также близок к опорной траектории \bar{y}_N (см. [4]), т.е. $\|\delta\bar{y}_J\| = \|\delta\bar{y}_{J0}\| < \delta(\varepsilon)$.

Предполагая, что

$$\|\delta\bar{x}_{Jk}\| < \varepsilon, \quad k = 0, \dots, K, \quad (4)$$

и линеаризуя уравнение (3), получаем, что

$$\delta\bar{y}_J = \sum_{k=0}^K J_{x_{N-k}} \mathbf{F}[\bar{x}_N, \dots, \bar{x}_{N-K}] \delta\bar{x}_{Jk}, \quad (5)$$

где $J_{x_{N-k}}$ – якобиан для k -ой переменной. Так как в общем случае вид $\mathbf{F}[\cdot]$ не может быть найден аналитически, уравнение (5) можно переписать в виде

$$\delta\bar{y}_J = \sum_{k=0}^K \mathbf{A}_k \delta\bar{x}_{Jk}, \quad (6)$$

где $\mathbf{A}_k = J_{\bar{x}_{N-k}} \mathbf{F}[\bar{x}_N, \dots, \bar{x}_{N-K}]$ ($k = 0, \dots, K$) – неизвестная матрица. Очевидно, что коэффициенты матрицы \mathbf{A}_k определены для всего набора векторов $\bar{x}_{N-K}, \dots, \bar{x}_N$, однако, поскольку элементы этой последовательности однозначно связаны друг с

другом оператором эволюции (1), можно предположить, что \mathbf{A}_k зависит только от \bar{x}_{N-K} , то есть, $\mathbf{A}_k = \mathbf{A}_k(\bar{x}_{N-K})$.

Принимая во внимание сделанное предположение (4), в силу линейности можно записать

$$\delta\bar{x}_{Jk} = \mathbf{B}_k(\bar{x}_{N-K}) \delta\bar{x}_J, \quad (7)$$

[где $\mathbf{B}_k(\bar{x}_{N-K})$ – неизвестная матрица³, коэффициенты которой зависят как от опорного вектора \bar{x}_{N-K} , так и от номера k рассматриваемого отклонения $\delta\bar{x}_{Jk}$], что приведет к следующему выражению для $\delta\bar{y}_J$:

$$\delta\bar{y}_J = \sum_{k=0}^K \mathbf{A}_k(\bar{x}_{N-K}) \mathbf{B}_k(\bar{x}_{N-K}) \delta\bar{x}_J, \quad (8)$$

а следовательно,

$$\delta\bar{y}_J = \mathbf{C} \delta\bar{x}_J, \quad (9)$$

где \mathbf{C} – матрица, определяемая как

$$\mathbf{C} = \sum_{k=0}^K \mathbf{A}_k(\bar{x}_{N-K}) \mathbf{B}_k(\bar{x}_{N-K}). \quad (10)$$

Необходимо отметить, что в рамках общепринятой концепции обобщенная синхронизация означает, что состояния взаимодействующих систем соотносятся друг с другом с помощью функционального соотношения (2). В этом случае можно получить соотношение, аналогичное (9):

$$\delta\bar{y}_J = \tilde{\mathbf{C}} \delta\bar{x}_J, \quad (11)$$

с одним лишь различием, что

$$\tilde{\mathbf{C}} = \mathcal{J}\mathbf{F}[\bar{x}_N]. \quad (12)$$

Несмотря на визуальное сходство уравнений (9) и (11), между ними существует значительная разница. В самом деле, уравнение (9) получено из предположения, что фазовые траектории \bar{x}_{N-k} и \bar{x}_{J-k} ($k = 0, \dots, K$) близки друг к другу на всей длине предыстории K (см. уравнение (4)), в то время как уравнение (11) требует близости только двух точек: \bar{x}_N и \bar{x}_J , т.е., вместо уравнения (4) необходимо использовать уравнение

$$\|\delta\bar{x}_J\| < \varepsilon. \quad (13)$$

Поскольку для хаотических систем фазовые траектории могут как сходиться, так и расходиться, близость \bar{x}_N и \bar{x}_J (уравнение (13)) не означает выполнение условия (4), т.е. среди векторов \bar{x}_J , близких к опорному состоянию \bar{x}_N , только небольшая часть удовлетворяет условию (4). Данное утверждение проиллюстрировано на рис. 1 на примере логистического отображения:

$$x_{n+1} = ax_n(1 - x_n), \quad a = 3.75. \quad (14)$$

Видно, что хотя обе траектории x_{J1} и x_{J2} близки к опорному состоянию x_N (и для обеих траекторий

³ Кроме $\mathbf{B}_0(\bar{x}_{N-K}) = \mathbf{E}$, где \mathbf{E} является единичной матрицей.

условие (13) выполняется), только траектория x_{J_1} удовлетворяет уравнению (4) из-за близости всей траектории x_{J_1-k} (●) к x_{N-k} , в то время как для траектории x_{J_2} (■) условие (4) не выполняется, так как не все точки траектории x_{J_2-k} близки к точкам опорной траектории x_{N-k} на всей длине предыстории K .

Несмотря на то что коэффициенты матриц C и \tilde{C} не известны, справедливость соотношений (9) и (11) может быть проверена, если существует $N > m$ ближайших соседей \tilde{x}_{J_i} опорного вектора \tilde{x}_N и соответствующих им векторов \tilde{y}_{J_i} ведомого отображения. Заметим также, что все векторы \tilde{x}_{J_i} , близкие к \tilde{x}_N , должны быть использованы для проверки уравнения (11), в то время как для проверки уравнения (9) необходимо использовать только те векторы \tilde{x}_{J_i} , предыстория которых удовлетворяет уравнению (4).

Определив наличие обобщенной синхронизации (например, при помощи метода вспомогательной системы), можно найти m ближайших соседей \tilde{x}_{J_i} ($i = 1, \dots, m$) и соответствующие им векторы \tilde{y}_{J_i} для определения коэффициентов матрицы C (или \tilde{C}) с помощью уравнения (9) (или уравнения (11) соответственно) так же, как это было сделано в [8]. Затем, определив коэффициенты матрицы C (или \tilde{C}), можно найти векторы $\delta\tilde{z}_{J_i}$ ($i = m + 1, \dots, N$):

$$\delta\tilde{z}_{J_i} = C\delta\tilde{x}_{J_i} \quad \text{или} \quad \delta\tilde{z}_{J_i} = \tilde{C}\delta\tilde{x}_{J_i} \quad (15)$$

и сравнить их с векторами $\delta\tilde{y}_{J_i}$ ведомой системы для проверки соотношения (9) (или (11)). Для характеристики степени близости векторов $\delta\tilde{y}_{J_i}$ и $\delta\tilde{z}_{J_i}$ друг с другом можно рассчитать нормированные разности

$$\Delta_{J_i} = \frac{\|\delta\tilde{y}_{J_i} - \delta\tilde{z}_{J_i}\|}{\|\delta\tilde{y}_{J_i}\|} \quad (16)$$

для каждой пары векторов и построить их распределение.

Чтобы проверить справедливость представленных выше теоретических рассуждений, рассмотрим поведение двух однонаправленно связанных логистических отображений:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= f(x_n, a_x), \\ y_{n+1} &= f(y_n, a_y) + \sigma(f(x_n, a_x) - f(y_n, a_y)), \end{aligned} \quad (17)$$

где $f(x, a) = ax(1-x)$, $a_x = 3.75$, $a_y = 3.79$ — управляющие параметры ведущей и ведомой систем соответственно, σ — параметр связи [9]. Так как рассматриваемые отображения являются одномерными, векторы должны быть заменены на скаляры, при этом все теоретические и аналитические рассуждения останутся справедливыми.

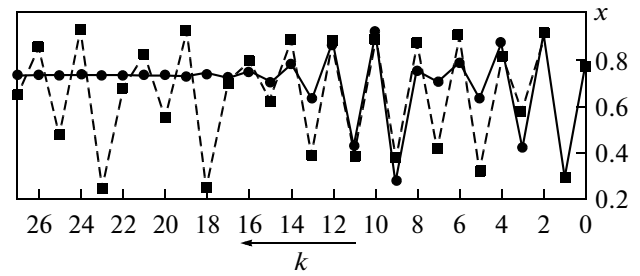
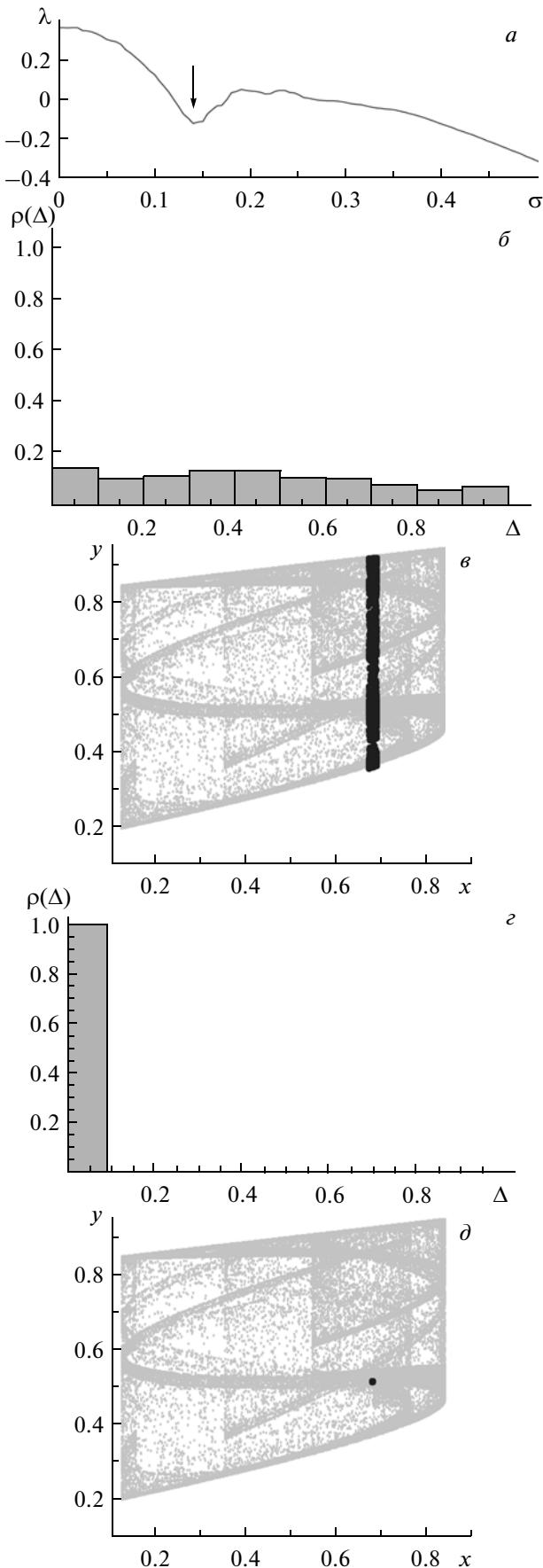


Рис. 1. Зависимость координаты x логистического отображения (14) от дискретной длины предыстории k . Опорная траектория x_{N-k} показана жирной линией, две траектории x_{J_1-k} и x_{J_2-k} (последние точки которых x_{J_1} и x_{J_2} близки к x_N) — точками ● (линия 1) и пунктирной линией с точками ■ (линия 2) соответственно. Горизонтальная ось направлена влево.

Порог возникновения режима обобщенной синхронизации определяли с помощью расчета условной ляпуновской экспоненты для системы (17) и уточняли при помощи метода вспомогательной системы [11]. На рис. 2 приведена зависимость условного ляпуновского показателя λ от параметра связи σ . Видно, что условная ляпуновская экспонента отрицательна для $\sigma \in [0.12; 0.18]$ и $\sigma \geq 0.265$, что свидетельствует о наличии обобщенной синхронизации в указанных диапазонах. При этом обобщенная синхронизация близка к полной (сильной) синхронизации при достаточно больших значениях параметра $\sigma \geq 0.265$, в то время как для $\sigma \in [0.12; 0.18]$ диагностируемый режим соответствует слабой синхронизации. Понятно, что для режима сильной синхронизации не нужно учитывать предысторию, так как состояния взаимодействующих систем соотносятся друг с другом простым функциональным соотношением $y_n \approx x_n$ [10]. В то же время случай слабой синхронизации ($\sigma \in [0.12; 0.18]$) требует дополнительных исследований.

Далее без потери общности выберем параметр связи $\sigma = 0.14$, что соответствует минимальному отрицательному значению условной ляпуновской экспоненты (отмечено стрелкой на рисунке 2а). Положив значение точности в уравнении (4) равным $\varepsilon = 0.01$, проанализируем влияние длины предыстории K на значения $\delta\tilde{z}_{J_i}$ и распределения нормированной разности (16). При этом опорную точку x_N будем выбирать случайно. Очевидно, что, когда соотношение (9) (или (11)) выполняется, распределение нормированных разностей Δ_{J_i} является δ -функцией.

На рис. 2б, в приведены гистограммы нормированных разностей Δ_{J_i} при различных значениях длины предыстории K . На рис. 2в, д показаны также плоскости (x, y) , характеризующие состоя-



ния ведущей и ведомой систем для выбранных значений управляющих параметров. Видно, что состояния взаимодействующих систем связаны друг с другом негладким (фрактальным) соотношением, что подтверждает предположение о том, что диагностируемый режим является слабым. На каждом из этих рисунков отмечены также точки (x_{j_i}, y_{j_i}) , удовлетворяющие условию (4). Рисунок 2б, в соответствует случаю, когда учитываются все ближайшие соседи (предыстория не принимается во внимание, $K = 0$), что соответствует традиционной концепции обобщенной синхронизации. В этом случае значения нормированной разности Δ_{j_i} распределены равномерно по всему интервалу $[0; 1]$ (рис. 2б), а все точки в фазовом пространстве ведомой системы также распределены случайным образом в широком диапазоне значений переменной y (рис. 2в). Полученные результаты позволяют сделать вывод о том, что уравнение (11) в данном случае не выполняется.

С ростом длины предыстории распределение нормированных разностей трансформируется и при оптимальной длине предыстории ($K = 28$) представляет собой δ -функцию (рис. 2з). В этом случае все состояния системы (x_{j_i}, y_{j_i}) , удовлетворяющие условию (4), оказываются сосредоточенными в малой окрестности опорной точки (x_N, y_N) (рис. 2д). При этом вся “фрактальность” исчезает, а соотношение между состояниями ведущей и ведомой систем становится гладким, как в и случае сильной синхронизации.

Таким образом, концепция обобщенной синхронизации в дискретных отображениях требует корректировки. Предложен подход для анализа обобщенной синхронизации в таких системах. Полученные результаты проиллюстрированы на примере двух однонаправленно связанных логистических отображений, находящихся в режиме обобщенной синхронизации.

Полученные результаты свидетельствуют о том, что разделение обобщенной синхронизации на слабую и сильную также нуждается в пересмотре и уточнении: в режиме сильной синхронизации состояния взаимодействующих систем оказываются связанными друг с другом при помощи функционального соотношения, в то время как при анализе слабой синхронизации необходимо учитывать предысторию поведения систем.

Рис. 2. Зависимость условной ляпуновской экспоненты λ от параметра связи σ (а); гистограммы нормированной разности Δ_{j_i} (б, з) и плоскости (x, y) (в, д) для логистических отображений (17), находящихся в режиме обобщенной синхронизации (значение $\sigma = 0.14$ отмечено стрелкой на рисунке (а)) для различной длины предыстории: $K = 0$ (б, в), $K = 28$ (з, д). На рисунке 2в, д также показаны состояния взаимодействующих систем, удовлетворяющие условию (4).

При этом как в случае сильной, так и в случае слабой синхронизации соотношение, устанавливаемое между состояниями взаимодействующих систем, является гладким, а так называемая “фрактальность” исчезает при корректном учете предыстории.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 12-02-00221), ФЦП “Научные и научно-педагогические кадры инновационной России” на 2009–2013 годы, Совета по грантам Президента РФ для поддержки молодых ученых – кандидатов наук (проект МК-672.2012.2).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Glass L.* // Nature (London). 2001. № 410. P. 277.
2. *Boccaletti S., Kurths J., Osipov G.V. et al.* // Phys. Rep. 2002. V. 366. P. 1.
3. *Короновский А.А., Москаленко О.И., Храмов А.Е.* // УФН. 2009. Т. 179. № 12. С. 1281.
4. *Rulkov N.F., Sushchik M.M., Tsimring L.S., Abarbanel H.D.I.* // Phys. Rev. E. 1995. V. 51. № 2. P. 980.
5. *Hramov A.E., Koronovskii A.A., Moskalenko O.I.* // Europhys. Lett. 2005. V. 72. № 6. P. 901.
6. *Hramov A.E., Koronovskii A.A.* // Phys. Rev. E. 2005. V. 71. № 6. 067201.
7. *Dmitriev B.S., Hramov A.E., Koronovskii A.A. et al.* // Phys. Rev. Lett. 2009. V. 102. № 7. 074101.
8. *Hramov A.E., Koronovskii A.A., Popov P.V.* // Phys. Rev. E. 2005. V. 72. № 3. 037201.
9. *Короновский А.А., Попов П.В., Храмов А.Е.* // ЖЭТФ. 2006. Т. 130. № 4(10). С. 748.
10. *Pyragas K.* // Phys. Rev. E. 1996. V. 54. № 5. P. R4508.
11. *Abarbanel H.D.I., Rulkov N.F., Sushchik M.M.* // Phys. Rev. E. 1996. V. 53. № 5. P. 4528.
12. *Koronovskii A.A., Moskalenko O.I., Hramov A.E.* // Phys. Rev. E. 2011. V. 84. № 3. 037201.