

ДИНАМИЧЕСКИЙ ХАОС
В РАДИОФИЗИКЕ И ЭЛЕКТРОНИКЕ

УДК 517.9

ВЛИЯНИЕ СТЕПЕНИ ВЗАИМНОСТИ СВЯЗИ НА УСТАНОВЛЕНИЕ
РАЗЛИЧНЫХ ТИПОВ ХАОТИЧЕСКОЙ СИНХРОНИЗАЦИИ

© 2011 г. А. А. Короновский, О. И. Москаленко, С. А. Шурыгина

Поступила в редакцию 12.01.2011 г.

Исследовано влияние степени взаимности связи на установление режимов полной синхронизации, синхронизации с запаздыванием, фазовой и обобщенной синхронизации. Показано, что в общем случае пороги возникновения синхронных режимов снижаются при увеличении степени взаимности связи между осцилляторами. Установлено также, что для режима обобщенной синхронизации в области относительно больших значений расстройки частот порог возникновения синхронного режима слабо зависит от коэффициента взаимности связи.

ВВЕДЕНИЕ

Изучение синхронизации хаотических колебаний нелинейных динамических систем, способных демонстрировать сложное поведение, уже давно находится в центре пристального внимания исследователей. Хаотическая синхронизация имеет важное фундаментальное и практическое значение (например, в биологических [1, 2], физиологических [3, 4], химических [5] задачах, при скрытой передаче информации с помощью хаотических сигналов [6, 7], при управлении системами сверхвысокочастотной электроники [8] и т.п.). Известно достаточно большое число различных типов хаотического синхронного поведения: полная синхронизация [9–15], синхронизация с запаздыванием (лаг-синхронизация) [16, 17], обобщенная синхронизация [18, 19], фазовая синхронизация [20, 21] и др. В настоящее время учеными различных стран мира проводится их всестороннее исследование, и если можно сказать, что каждый тип синхронного поведения по отдельности исследован достаточно полно, то проблема взаимосвязи различных типов синхронного поведения друг с другом находится лишь в самом начале своего развития. Так, например, известные работы [16, 20, 22–28] направлены на выявление взаимосвязи различных типов хаотической синхронизации в системах с единым типом связи. В работах [22–26] предложен новый подход к описанию синхронного поведения хаотических осцилляторов – синхронизация временных масштабов, который естественным образом обобщает различные типы синхронного поведения, перечисленные выше. Использование этого подхода позволяет рассматривать все вышеназванные типы синхронного поведения хаотических осцилляторов с единых позиций.

Как правило, хаотическая синхронизация исследуется либо в системах с однонаправленным типом связи (когда ведущий осциллятор воздей-

ствует на ведомый), либо с взаимным (когда оба осциллятора в равной степени воздействуют друг на друга). Очевидно, что поведение систем (в частности, границы установления синхронных режимов) отличаются для различных способов связи хаотических систем. Можно ожидать, например, что при взаимной связи между хаотическими осцилляторами синхронный режим будет устанавливаться при меньших значениях параметра связи, чем в случае однонаправленного связанных систем. Тем не менее вопрос о взаимосвязи различных типов синхронного поведения друг с другом в системах с различным типом связи в настоящее время остается открытым. Поэтому целью данной работы является определение закономерностей поведения границ различных типов хаотической синхронизации при переходе от однонаправленного связанных систем к системам с взаимной связью.

В данной работе мы рассмотрим четыре основных типа синхронного поведения: полная синхронизация, обобщенная синхронизация, фазовая синхронизация и синхронизация с запаздыванием. Возникновение практически всех этих типов хаотической синхронизации возможно как в системах с однонаправленным, так и взаимным типом связи. Представляется интересным вопрос о переходе от одного типа связи к другому. Отдельного рассмотрения требует режим обобщенной хаотической синхронизации во взаимно связанных системах. Следует отметить, что в системах с таким типом связи этот режим практически не изучен. Более того, понятие обобщенной синхронизации для взаимно связанных систем требует расширения существующей концепции этого типа синхронного поведения в однонаправленно связанных системах. Поэтому наряду с изучением взаимосвязи различных типов хаотической синхронизации в системах с различным типом связи в данной работе мы остановимся на разработке

концепции обобщенной синхронизации, справедливой как для однонаправлено связанных систем, так и для систем с взаимным типом связи.

1. ТИПЫ ХАОТИЧЕСКОЙ СИНХРОНИЗАЦИИ

Прежде всего дадим краткое описание известных типов хаотической синхронизации и методов их диагностики. Наиболее простым является режим полной хаотической синхронизации [13, 14], который означает точное совпадение векторов состояния взаимодействующих систем $\bar{x}_1(t) \equiv \bar{x}_2(t)$ и, следовательно, возможен лишь в случае их идентичности по управляющим параметрам. Если управляющие параметры слегка различаются, возможно возникновение режима синхронизации с запаздыванием [16, 17], когда взаимодействующие системы демонстрируют идентичные колебания, сдвинутые на некоторый временной интервал τ , т.е. $\bar{x}_1(t) \cong \bar{x}_2(t + \tau)$. Очевидно, что с увеличением силы связи между осцилляторами, временной сдвиг τ стремится к 0, а синхронный режим стремится к полной хаотической синхронизации. Для диагностики этих типов синхронного поведения используют функцию подобия [16]:

$$S^2(\tau) = \frac{\langle |\bar{x}_2(t + \tau) - \bar{x}_1(t)|^2 \rangle}{\sqrt{\langle |\bar{x}_1(t)|^2 \rangle \langle |\bar{x}_2(t)|^2 \rangle}}. \quad (1)$$

Если взаимодействующие системы находятся в режиме синхронизации с запаздыванием, минимум функции подобия обращается в 0, т.е. $\sigma = \min_{\tau} S(\tau) = 0$, где τ – временной сдвиг между векторами состояний взаимодействующих систем. Очевидно, условие $\sigma = 0$ при $\tau = 0$ является критерием возникновения режима полной синхронизации. Однако наиболее простым способом диагностики режима полной хаотической синхронизации является непосредственное сравнение векторов состояний взаимодействующих систем $\bar{x}_1(t)$ и $\bar{x}_2(t)$ или расчет ошибки синхронизации [27]:

$$\langle e \rangle = \int_0^{\infty} \|\bar{x}_1(t) - \bar{x}_2(t)\| dt. \quad (2)$$

Обобщенная синхронизация традиционно вводится в рассмотрение для системы двух однонаправлено связанных хаотических осцилляторов, ведущего $\bar{x}_d(t)$ и ведомого $\bar{x}_r(t)$, и означает, что после завершения переходного процесса устанавливается некоторая функциональная зависимость между их состояниями [18], т.е.

$$\bar{x}_r(t) = \mathbf{F}[\bar{x}_d(t)]. \quad (3)$$

Сам вид этой зависимости $\mathbf{F}[\cdot]$ может быть достаточно сложным, а процедура ее нахождения

весьма нетривиальной [28]. При этом следует отметить, что в качестве взаимодействующих осцилляторов могут выступать две разные динамические системы, в том числе и с различной размерностью фазового пространства.

В литературе предложено несколько методов для диагностирования режима обобщенной синхронизации между хаотическими осцилляторами, такие как метод ближайших соседей [18, 29], метод расчета условных ляпуновских экспонент [14, 30] и метод вспомогательной системы [31].

Согласно методу ближайших соседей, наличие функциональной зависимости $\mathbf{F}[\cdot]$ между состояниями ведущей и ведомой систем заключается в том, что два близких состояния в фазовом пространстве ведомого осциллятора соответствуют двум близким состояниям в пространстве ведущей системы [18]. Количественной характеристикой степени близости состояний систем является среднее расстояние между двумя состояниями ведомой системы, \bar{x}_r^n и \bar{x}_r^m , нормированное на среднее расстояние δ между случайно выбранными состояниями ведущей системы [32]:

$$d = \frac{1}{N\delta} \sum_{n=0}^{N-1} \|\bar{x}_r^n - \bar{x}_r^m\|, \quad (4)$$

где N – число производимых итераций. В режиме обобщенной синхронизации $d \rightarrow 0$, в отсутствие функционального соотношения между состояниями ведущей и ведомой систем $d \approx 1$.

Следует отметить, что метод ближайших соседей для диагностики режима обобщенной синхронизации не позволяет точно установить порог возникновения синхронного режима, с его помощью можно найти диапазон значений управляющего параметра, которому принадлежит точка, разграничивающая синхронный и асинхронный режимы. В то же время метод ближайших соседей не требует знания уравнений, описывающих эволюцию системы, а поэтому он находит применение при обработке экспериментальных данных [33]. Еще одним применением метода ближайших соседей является уточнение и верификация результатов, полученных с помощью других методов.

Для диагностики режима обобщенной синхронизации путем численного моделирования наиболее эффективным является метод вспомогательной системы [31]. Суть метода вспомогательной системы сводится к следующему: наряду с ведомой системой $\bar{x}_r(t)$ рассматривается идентичная ей вспомогательная система $\bar{x}_a(t)$. Начальные условия для вспомогательной системы $\bar{x}_a(t_0)$ выбираются отличными от начального состояния ведомой системы $\bar{x}_r(t_0)$, однако лежащими в бассейне притяжения того же аттрактора (на практике это означает небольшую расстройку начальных усло-

вий, которая реализуется автоматически из-за наличия флуктуаций). В случае отсутствия режима обобщенной синхронизации между взаимодействующими системами вектора состояния ведомой $\bar{x}_r(t)$ и вспомогательной $\bar{x}_d(t)$ систем принадлежат одному и тому же хаотическому аттрактору, но являются различными. Если имеет место режим обобщенной синхронизации, то после завершения переходного процесса состояния ведомой и вспомогательной систем должны стать идентичными $\bar{x}_r(t) \equiv \bar{x}_d(t)$ в силу выполнения соотношений $\dot{\bar{x}}_r(t) = \mathbf{F}[\bar{x}_d(t)]$ и, соответственно, $\dot{\bar{x}}_d(t) = \mathbf{F}[\bar{x}_d(t)]$. Таким образом, эквивалентность состояний ведомой и вспомогательной систем после переходного процесса является критерием наличия обобщенной синхронизации между ведущим и ведомым осцилляторами.

Анализ режима обобщенной синхронизации может быть проведен также с помощью вычисления условных ляпуновских экспонент [14, 30]. Если размерности фазовых пространств ведущей и ведомой систем соответственно равны N_d and N_r , то поведение однонаправлено связанных хаотических осцилляторов может быть охарактеризовано с помощью спектра ляпуновских показателей $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_{N_d+N_r}$. Поскольку поведение ведущей системы не зависит от состояния ведомого осциллятора, спектр ляпуновских показателей может быть разделен на две части: ляпуновские показатели ведущей системы $\lambda_1^d \geq \dots \geq \lambda_{N_d}^d$ и условные ляпуновские показатели $\lambda_1^r \geq \dots \geq \lambda_{N_r}^r$. Критерием существования обобщенной синхронизации в однонаправлено связанных динамических системах [14, 28] является отрицательность старшего условного ляпуновского показателя λ_1^r . Следует также отметить, что для однонаправлено связанных хаотических осцилляторов режимы полной синхронизации и синхронизации с запаздыванием также являются частными случаями режима обобщенной синхронизации [28].

В основе концепции хаотической фазовой синхронизации лежит понятие мгновенной фазы $\varphi(t)$ хаотического сигнала [34–37]. Фазовая синхронизация означает, что происходит захват фаз хаотических сигналов, в то время как амплитуды этих сигналов остаются несвязанными друг с другом и выглядят хаотическими [34, 35]. В настоящее время известно несколько способов введения фазы, дающих одинаково корректные результаты для систем с достаточно хорошей топологией аттрактора (систем с фазово-когерентным аттрактором). Наиболее распространенным из них является введение фазы $\varphi(t)$ как угла в полярной системе координат на плоскости (x, y) [16, 38]

$$\varphi = \arctg \frac{y}{x}, \quad (5)$$

но при этом все траектории на плоскости (x, y) должны вращаться вокруг начала координат. Иногда возможно провести преобразования координат, чтобы получить подходящую для введения фазы проекцию (как, например, для системы Лоренца) [20, 38]. В ряде случаев переход на плоскость скоростей (\dot{x}, \dot{y}) позволяет избавиться от фазовой некогерентности аттрактора и ввести фазу как угол в полярных координатах на плоскости (\dot{x}, \dot{y}) , т.е. $\varphi = \arctg \frac{\dot{y}}{\dot{x}}$ [39].

Фазовая синхронизация возникает в том случае, если разность мгновенных фаз хаотических сигналов $\bar{x}_{1,2}(t)$ является ограниченной во времени

$$|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)| < \text{const}. \quad (6)$$

2. ВЛИЯНИЕ СТЕПЕНИ ВЗАИМНОСТИ СВЯЗИ НА УСТАНОВЛЕНИЕ РЕЖИМОВ ХАОТИЧЕСКОЙ СИНХРОНИЗАЦИИ: АНАЛИТИЧЕСКИЕ ОЦЕНКИ

Исследуем, какое влияние оказывает тип связи между связанными системами на установление режимов полной синхронизации, синхронизации с запаздыванием, обобщенной и фазовой синхронизаций.

Рассмотрим поведение двух диссипативно связанных идентичных хаотических осцилляторов:

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}}_1 &= \mathbf{F}(\bar{x}_1) + \sigma\alpha\mathbf{H}(\bar{x}_2 - \bar{x}_1), \\ \dot{\bar{x}}_2 &= \mathbf{F}(\bar{x}_2) + \sigma\mathbf{H}(\bar{x}_1 - \bar{x}_2), \end{aligned} \quad (7)$$

где \bar{x}_i – вектор состояния i -го элемента, \mathbf{F} – оператор эволюции систем, $\mathbf{H} = \delta_{i,j}$ – матрица, характеризующая связь между элементами, σ – скалярный параметр, характеризующий силу связи, $\delta_{i,j} = 0$ или 1, $\delta_{i,j} = 0$, ($i \neq j$), α – коэффициент взаимности связи, характеризующий степень влияния второй системы на первую (или симметрию связи между системами). Понятно, что при $\alpha = 0$ тип связи в системе (7) является однонаправленным, а $\alpha = 1$, наоборот, характеризует взаимную симметричную связь между взаимодействующими системами.

Ввиду идентичности значений управляющих параметров взаимодействующих систем, в системе (7) возможно установление режима полной хаотической синхронизации. Найти пороговое значение установления режима полной хаотической синхронизации можно аналитически, воспользовавшись методом определения устойчивости синхронного состояния сети, основанным на рассмотрении главного ляпуновского показателя [40, 41]. Согласно этому методу для определения порога возникновения полной хаотической синхронизации (и области устойчивости этого режима) в

произвольной сети, состоящей из N связанных идентичных осцилляторов

$$\dot{\bar{x}}_i = \mathbf{F}(\bar{x}_i) + \sigma \sum_{j=1}^N \mathbf{G}_{ij} \mathbf{L}(\bar{x}_j), \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (8)$$

(здесь \mathbf{L} – оператор, задающий взаимную связь элементов, \mathbf{G}_{ij} – элементы матрицы связи \mathbf{G}), достаточно рассчитать зависимость старшего показателя Ляпунова Λ от параметра $v = \sigma \lambda_i$ (λ_i , $i = 2, \dots, N$ – собственные числа матрицы связи \mathbf{G}) для системы

$$\dot{\xi} = [\mathbf{JF}(\bar{x}_s) + v \mathbf{JL}(\bar{x}_s)] \xi, \quad (9)$$

где \bar{x} – переменная, характеризующая эволюцию во времени автономного осциллятора

$$\dot{\bar{x}} = \mathbf{F}(\bar{x}). \quad (10)$$

Области, где $\Lambda(v) < 0$, соответствуют областям устойчивости синхронного состояния сети. При этом момент перехода v_1 старшего ляпуновского показателя через нуль $\Lambda(v_1) = 0$ может быть рассмотрен как порог установления режима полной хаотической синхронизации в сети связанных нелинейных элементов [43].

Очевидно, что при $i = 2$ система (8) переходит в систему (7), т.е. две связанные системы (7) представляют собой простейший случай сети – сети из двух элементов. В этом случае матрица связи между элементами сети запишется в виде

$$\mathbf{G}_{ij} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ \alpha & -\alpha \end{pmatrix}, \quad (11)$$

а ее собственные числа $\lambda_1^\alpha = 0$, $\lambda_2^\alpha = -(1 + \alpha)$. Порог возникновения полной синхронизации в данном случае целиком определяется величиной параметра α , т.е. степенью влияния второй системы на первую (степенью взаимности связи). Порог возникновения полной синхронизации

$$\sigma^\alpha = \frac{v_1}{|\lambda_2^\alpha|} = \frac{v_1}{1 + \alpha}. \quad (12)$$

Из соотношения (12) следует, что пороги установления полной синхронизации в системах с однонаправленным $\sigma^1(\alpha = 0)$ и взаимным $\sigma^2(\alpha = 1)$ типами связи находятся в соотношении

$$\sigma^1 / \sigma^2 = 2/1. \quad (13)$$

Следует отметить, что соотношения (12) и (13) должны выполняться для любых динамических систем, демонстрирующих хаотическую динамику, выступающих в качестве элементов сети размерности 2. В то же время такое соотношение останется справедливым только для режима полной хаотической синхронизации, реализация которого возможна в системах с идентичными параметрами. Понятно, что введение расстройки

управляющих параметров систем приведет к нарушению соотношений (12)–(13) и реализации других типов синхронного поведения в системе (7). Найти соотношения пороговых значений установления синхронных режимов аналитически в таких случаях представляется затруднительным. Между тем численное моделирование позволяет провести соответствующие оценки для различных типов синхронного поведения в связанных системах как с идентичными, так и расстроенными параметрами. В разделе 3 проведены такие оценки для различных типов хаотической синхронизации на примере связанных систем Ресслера.

3. ВЛИЯНИЕ СТЕПЕНИ ВЗАИМНОСТИ СВЯЗИ НА УСТАНОВЛЕНИЕ РЕЖИМОВ ХАОТИЧЕСКОЙ СИНХРОНИЗАЦИИ: ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Уравнения, описывающие динамику исследуемой системы связанных осцилляторов Ресслера, записываются в виде

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -\omega_1 y_1 - z_1 + \alpha \sigma (x_2 - x_1), \\ \dot{y}_1 &= \omega_1 x_1 + a y_1, \quad \dot{z}_1 = p + z_1 (x_1 - c), \\ \dot{x}_2 &= -\omega_2 y_2 - z_2 + \sigma (x_1 - x_2), \\ \dot{y}_2 &= \omega_2 x_2 + a y_2, \quad \dot{z}_2 = p + z_2 (x_2 - c), \end{aligned} \quad (14)$$

где $(x_{1,2}, y_{1,2}, z_{1,2})$ – декартовы координаты первой и второй систем соответственно, точки означают производные по времени, σ – параметр связи, α – коэффициент взаимности связи. Значения остальных управляющих параметров системы (14) по аналогии с известными работами [44, 45] выберем следующими: $a = 0.15$, $p = 0.2$, $c = 10.0$. Параметр ω_2 (характеризующий собственную частоту колебаний второй системы) зафиксируем равным $\omega_2 = 0.95$, а аналогичный параметр первой системы будем менять в диапазоне $[0.89, 1.01]$, чтобы задать расстройку между осцилляторами.

Исследуем вопрос о том, как ведут себя границы возникновения режимов полной синхронизации, синхронизации с запаздыванием, обобщенной и фазовой синхронизации при изменении параметра $\alpha \in [0, 1]$.

А. ПОЛНАЯ СИНХРОНИЗАЦИЯ

Сначала рассмотрим соотношение аналитических оценок и численно полученных результатов для режима полной хаотической синхронизации. В этом случае система уравнений (14) может быть записана в виде (8), где $\bar{x}_i = (x_i, y_i, z_i)$, $\mathbf{F}(\bar{x}_i) = (-\omega_i y_i - z_i, \omega_i x_i + a y_i, p + z_i (x_i - c))$, $\mathbf{H}(\bar{x}_i) = (x_i, 0, 0)^T$, $i = 1, 2$, $\omega_i = 0.95$, а матрица \mathbf{G} коэффициентов связи между элементами сети будет определяться соотношением (11). На рис. 1 приведена

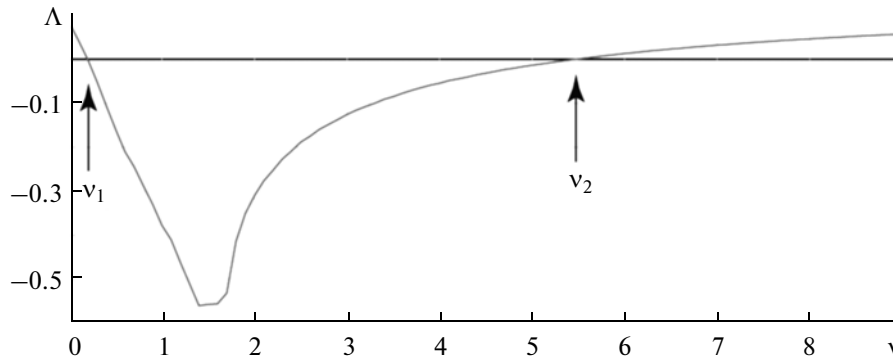


Рис. 1. Зависимость главного ляпуновского показателя от параметра ν для сети из систем Ресслера. Границы $\nu_{1,2}$ устойчивости синхронного состояния сети показаны стрелками.

зависимость главного ляпуновского показателя для такой сети от параметра ν . Значение $\nu_1 = 0.2$, соответствующее моменту перехода главного ляпуновского показателя через нуль, отмечено стрелкой.

На основании проведенных расчетов можно сделать вывод, что зависимость порога возникновения режима полной хаотической синхронизации в системе двух связанных осцилляторов Ресслера (14) определяется соотношением (12), где $\nu_1 = 0.2$. Рассмотрим, как соотносятся полученные таким образом аналитические оценки с результатами прямых численных вычислений. На рис. 2 приведена зависимость порога возникновения полной хаотической синхронизации от параметра α , полученная путем непосредственного сравнения векторов состояния взаимодействующих систем (см. раздел 1). Здесь же приведена теоретическая зависимость (12). Видно хорошее со-

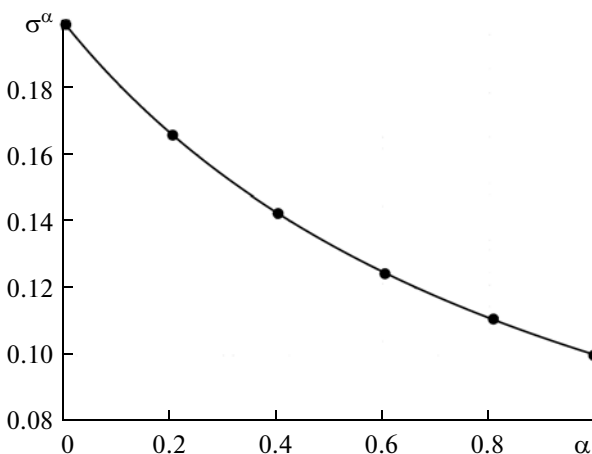


Рис. 2. Зависимость порога возникновения полной синхронизации от коэффициента взаимности связи α в системе (14) ($\omega_{1,2} = 0.95$). Точки – численное моделирование, сплошная линия – расчет по формуле (12).

ответствие аналитически и численно полученных результатов. Таким образом, при увеличении коэффициента α порог возникновения полной синхронизации уменьшается по закону (12). При этом достаточно отчетливо видно, что режим полной синхронизации в однонаправлено связанных идентичных системах Ресслера (14) возникает при величине силы связи $\sigma^1 = 0.2$, в то время как в аналогичных системах Ресслера, связанных взаимно, он реализуется при $\sigma^2 = 0.1$, т.е. пороги возникновения полной синхронизации в однонаправлено и взаимно связанных системах Ресслера соотносятся как 2 : 1, в полном соответствии с результатами теоретических предсказаний.

Б. СИНХРОНИЗАЦИЯ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Теперь исследуем вопрос о том, как влияет расстройка управляющих параметров на установление синхронного режима в связанных системах. Известно, что в этом случае возможно установление синхронизации с запаздыванием, когда взаимодействующие системы демонстрируют идентичные колебания, сдвинутые на некоторый временной интервал. Как отмечалось ранее, аналитический расчет границы синхронизации с запаздыванием (так же как и других типов синхронного поведения, которые будут рассмотрены далее) представляется затруднительным. Однако она может быть легко найдена численно путем расчета функции подобия (1).

Рассмотрим, как ведут себя границы режима синхронизации с запаздыванием при изменении параметра α . На рис. 3а представлены такие границы на плоскости параметров (ω_1, σ) при различных $\alpha \in [0; 1]$. Кривые I ($\alpha = 0$) и b ($\alpha = 1$) показывают границы синхронизации с запаздыванием для однонаправлено и взаимно связанных осцилляторов Ресслера соответственно. Остальные кривые находятся между ними, причем чем больше α , тем ниже лежит кривая, тем быстрее ре-

ализуется режим синхронизации с запаздыванием. В то же время четкого закона зависимости $\sigma(\alpha)$ наблюдать не удастся. На рис. 3б приведены зависимости $\sigma(\alpha)$ для случая относительно большой и относительно слабой расстройки собственных частот.

Также для однонаправлено и взаимно связанных осцилляторов приведены зависимости, иллюстрирующие величину временного сдвига между состояниями взаимодействующих систем в момент установления режима синхронизации с запаздыванием для различных значений параметра ω_1 (рис. 4). Нетрудно заметить, что если управляющие параметры взаимодействующих систем идентичны, то временной сдвиг между состояниями взаимодействующих систем и в случае однонаправленной, и в случае взаимной связи равен нулю, а режим синхронизации с запаздыванием совпадает с режимом полной синхронизации.

По мере увеличения расстройки между системами растет величина временного сдвига между состояниями систем. Когда временной сдвиг оказывается сравнительно малым (что соответствует случаю относительно слабой расстройки управляющих параметров, $\omega_1 \in (0.93; 0.97)$), соотношение (13) оказывается по-прежнему справедливым, хотя и приближенно. При дальнейшем увеличении частотной расстройки временной сдвиг практически выходит на уровень насыщения (см. рис. 4 при $\omega_1 < 0.93$ и $\omega_1 > 0.97$), а соотношение (13) перестает выполняться вовсе (см. рис. 3а).

Следует обратить внимание на тот факт, что выход значения временного сдвига на уровень насыщения в системах с однонаправленным типом связи происходит несколько раньше, чем в аналогичных системах, связанных взаимно. Более того, временной сдвиг между состояниями взаимодействующих систем в случае взаимной связи между ними оказывается несколько больше, чем в системах с однонаправленной связью. Это обусловлено существенными отличиями в пороговых значениях параметра связи, соответствующих установлению синхронного режима. Так как временной сдвиг между состояниями взаимодействующих систем в режиме синхронизации с запаздыванием зависит от параметра связи по закону $\tau \sim \sigma^{-1}$ [23], а увеличение расстройки между системами приводит к резкому росту порогового значения параметра связи, такое поведение зависимостей, приведенных на рис. 4, оказывается достаточно типичным для хаотических систем, связанных однонаправлено или взаимно.

В. ОБОБЩЕННАЯ СИНХРОНИЗАЦИЯ

Теперь перейдем к анализу обобщенной синхронизации [18] в системе (14). Как упоминалось выше, для однонаправлено связанных систем ре-

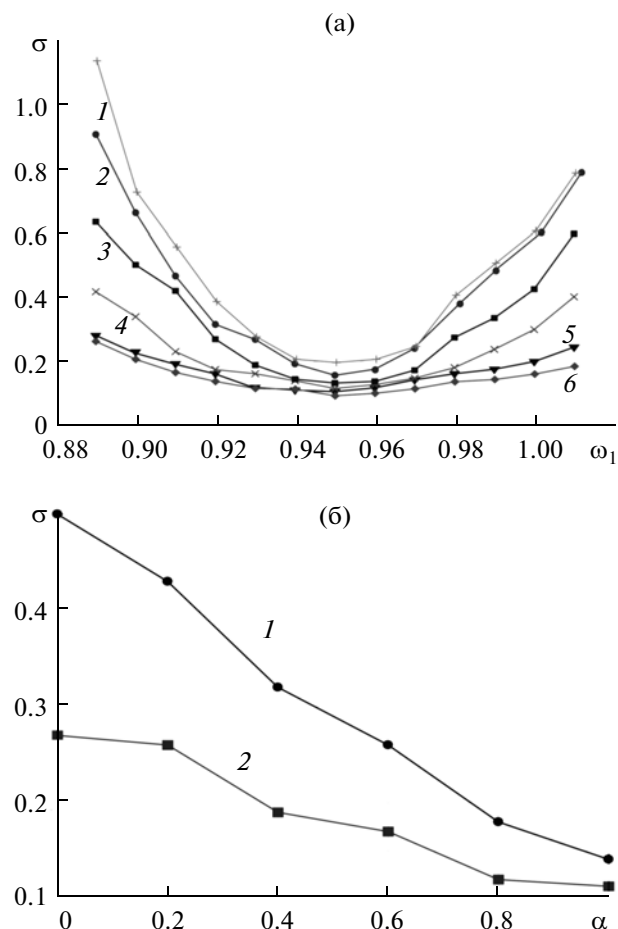


Рис. 3. Границы синхронизации с запаздыванием двух связанных систем Ресслера (14) на плоскости параметров (ω_1, σ) при увеличении параметра α от 0 (кривая 1) до 1 (кривая 2) с шагом 0.2 (а); зависимость порога синхронизации с запаздыванием от параметра α для случаев относительно большой ($\omega_1 = 0.99$, кривая 1) и относительно слабой ($\omega_1 = 0.93$, кривая 2) расстройки собственных частот.

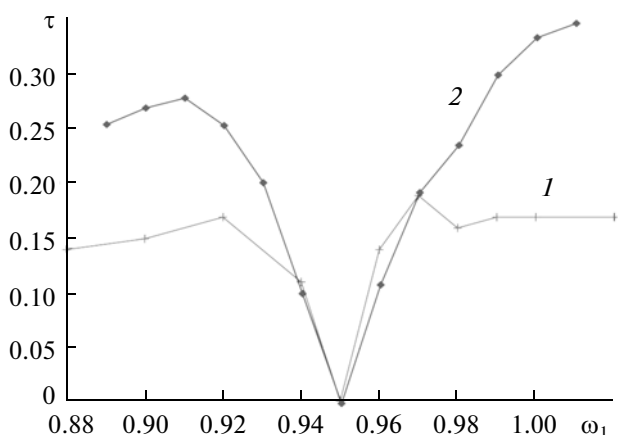


Рис. 4. Временной сдвиг между состояниями двух однонаправлено (1) и взаимно связанных (2) систем Ресслера в момент установления синхронизации с запаздыванием при различных значениях параметра ω_1 .

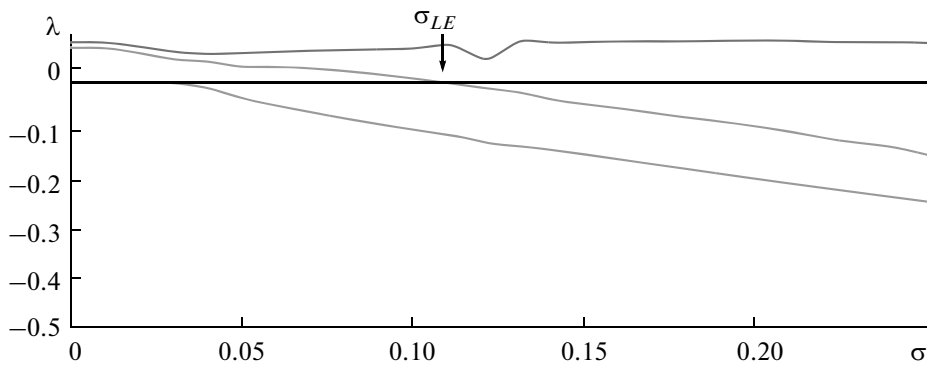


Рис. 5. Зависимость четырех старших ляпуновских экспонент от параметра связи σ для системы взаимосвязанных осцилляторов Ресслера, $\omega_1 = 0.99$. Момент перехода одной из положительных ляпуновских экспонент в область отрицательных значений σ_{LE} показан стрелкой.

жимы полной синхронизации и синхронизации с запаздыванием представляют собой частные случаи обобщенной синхронизации и являются ее более сильными формами (см. также [28]), т.е. когда в системе реализуется режим полной синхронизации или синхронизации с запаздыванием, обязательно должна наблюдаться обобщенная синхронизация. Аналогичная ситуация должна иметь место в системах с взаимным типом связи, как с симметричным, так и несимметричным, но здесь есть целый ряд серьезных вопросов, требующих дальнейшего изучения. Напомним, что само понятие обобщенной синхронизации для систем с взаимным типом связи введено не было. Поэтому по аналогии со случаем однонаправленно связанных систем будем понимать под обобщенной синхронизацией в двух системах с взаимной связью такой режим, при котором устанавливается уникальное функциональное соотношение между их состояниями. В этом случае функциональное соотношение (3) переписывается в виде

$$F[\bar{x}_1(t), \bar{x}_2(t)] = 0. \quad (15)$$

Следует отметить, что соотношение (3) может быть рассмотрено как частный случай (15), следовательно, основные свойства обобщенной синхронизации однонаправленно и взаимно связанных систем должны сохраняться.

Как упоминалось ранее, для диагностики обобщенной синхронизации в системах с однонаправленным типом связи наряду с методом вспомогательной системы и методом ближайших соседей используется метод расчета ляпуновских экспонент, который может быть применен для анализа обобщенной синхронизации в системах с взаимным типом связи. Действительно, при увеличении параметра связи между системами одна из положительных ляпуновских экспонент переходит в область отрицательных значений (рис. 5). Граница перехода второго ляпуновского показателя в область отрицательных значений в системе взаимно

связанных осцилляторов Ресслера на плоскости параметров (ω_1, σ) показана на рис. 6 (кривая 2). Видно, что указанная граница не совпадает с границей синхронизации с запаздыванием, приведенной на рисунке (кривая 1). Более того, она проходит ниже границы синхронизации с запаздыванием и практически не зависит от величины частотной расстройки между взаимодействующими системами. Тот факт, что переход одной из положительных ляпуновских экспонент во взаимно связанных системах в область отрицательных значений никак не связан с возникновением синхронизации с запаздыванием, а по аналогии со случаем однонаправленно связанных систем соответствует границе установления режима обобщенной синхронизации в системах с взаимным типом связи, был подтвержден в работе [46] при помощи метода ближайших соседей.

На рис. 7а приведены границы обобщенной синхронизации на плоскости параметров (ω_1, σ) при различных значениях параметра $\alpha \in [0; 1]$. Из рисунка видно, что границы установления синхронного режима в случае однонаправленной и взаимной связи между системами (кривая 1 и кривая 6 соответственно) сильно отличаются друг от друга. В области относительно больших значений расстройки собственных частот пороги обобщенной синхронизации в том и другом случае оказываются близки друг к другу. В области относительно слабых значений частотной расстройки ($\omega_1 \leq 0.91$, $\omega_1 \geq 0.99$) эти значения достаточно сильно отличаются, и если для идентичных систем ввиду близости режима обобщенной синхронизации к полной синхронизации соотношение (13) примерно выполняется, то по мере увеличения расстройки между системами наблюдается постепенный переход от одного соотношения к другому. Такое поведение границы обобщенной синхронизации в однонаправленно связанных системах на плоскости параметров (ω_1, σ) подробно объясне-

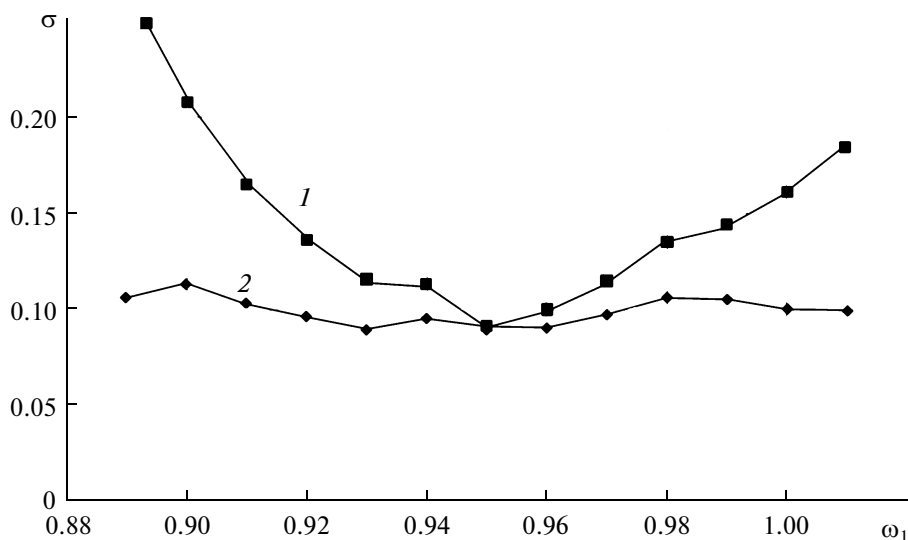


Рис. 6. Границы режима синхронизации с запаздыванием (кривая 1) и момента перехода одной из положительных ляпуновских экспонент системы в область отрицательных значений (кривая 2) в системе двух взаимно связанных осцилляторов Ресслера.

но в работах [45, 47]. Существенные отличия в количественных значениях порога возникновения синхронного режима в области относительно больших и относительно слабых значений расстройки собственных частот обусловлены отличиями в поведении основных спектральных компонент фурье-спектров взаимодействующих систем (см. подробно [47, 48]). В системах с взаимным типом связи спектральные компоненты ведут себя качественно одинаково при изменении параметра ω_1 , что не приводит к существенным отличиям в количественных значениях порога возникновения обобщенной синхронизации в этом случае.

Одной из наиболее важных задач, связанных с изучением обобщенной синхронизации, является вопрос о том, каким образом осуществляется переход от кривой 1 к кривой 6 (см. рис. 7) и при каком значении α влияние частотной расстройки между системами станет существенным. Из рис. 7а видно, что независимо от величины взаимности связи α в области относительно больших значений расстройки собственных частот, критические значения параметра связи оказываются близки друг другу. В области относительно слабых значений расстройки собственных частот при $\alpha \in [0; 0.6]$ порог возникновения синхронного режима значительно превосходит аналогичное значение параметра связи в области относительно больших значений частотной расстройки. При $\alpha \in [0.8; 1]$ наблюдается слабая зависимость порога обобщенной синхронизации от параметра частотной расстройки.

На рис. 7б по аналогии с рис. 3б показана зависимость порога обобщенной синхронизации от

параметра α для случаев относительно большой и относительно слабой частотной расстройки. Видно, что в области слабых значений расстройки частот порог обобщенной синхронизации почти линейно уменьшается с ростом параметра α , в то время как в области больших значений частотной расстройки имеет место слабая зависимость $\sigma(\alpha)$, не подчиняющаяся линейной зависимости.

Г. ФАЗОВАЯ СИНХРОНИЗАЦИЯ

В данном разделе проанализируем влияние степени симметричности связи на установление режима фазовой синхронизации в системе связанных осцилляторов Ресслера (14). При выбранных значениях управляющих параметров аттракторы этих систем в отсутствие связи являются фазово-когерентными. Это позволяет в соответствии с соотношением (5) ввести в рассмотрение фазы данных систем как углы в полярной системе координат на плоскостях $(x_{1,2}, y_{1,2})$.

На рис. 8 приведены границы возникновения фазовой синхронизации на плоскости параметров (ω_1, σ) и зависимости пороговых значений фазовой синхронизации для случаев относительно большой и относительно слабой расстройки собственных частот. Видно, что при увеличении параметра α порог фазовой синхронизации уменьшается, зависимость $\sigma(\alpha)$ близка к линейной (в области как относительно больших, так и относительно слабых значений расстройки собственных частот).

Из рис. 8 видно, что по мере увеличения расстройки параметров, порог возникновения фазовой синхронизации в системах с однонаправлен-

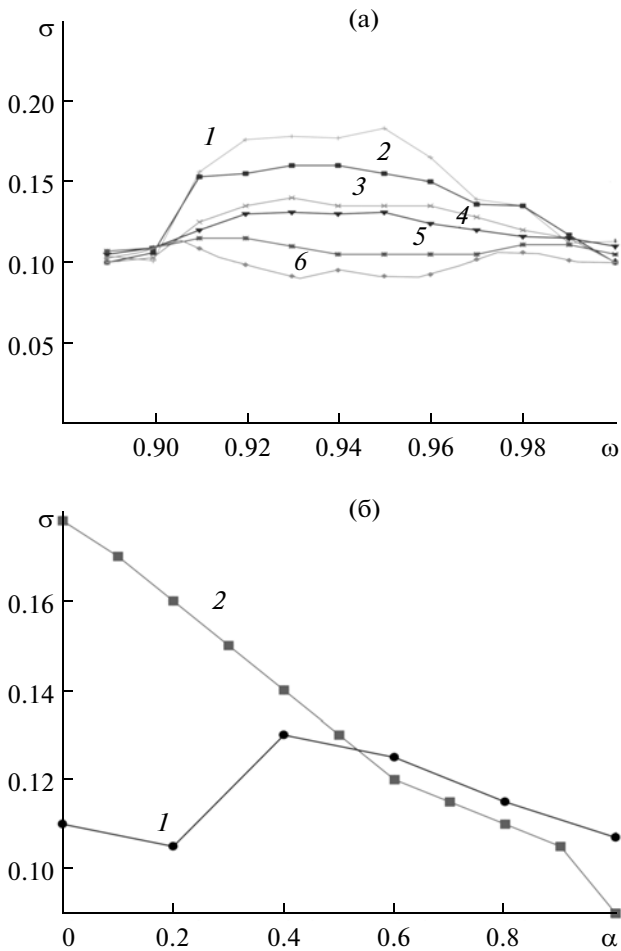


Рис. 7. Границы обобщенной синхронизации двух связанных систем Ресслера (14) на плоскости параметров (ω_1, σ) при увеличении параметра α от 0 (кривая 1) до 1 (кривая 2) с шагом 0.2 (а). Зависимость порога обобщенной синхронизации от параметра α для случаев относительно большой ($\omega_1 = 0.99$, кривая 1) и относительно слабой ($\omega_1 = 0.93$, кривая 2) расстройки собственных частот (б).

ным типом связи начинает резко расти, в то время как для взаимно связанных систем рост границы фазовой синхронизации происходит значительно медленнее. Такое поведение фазовой синхронизации в системах с однонаправленной связью можно объяснить следующим образом. Известно [49, 50], что при $\omega_d < 0.9$ и $\omega_d > 0.98$ в системах Ресслера (14) с вышеуказанными значениями управляющих параметров возникновение/разрушение фазовой синхронизации происходит через появление/потерю фазовой когерентности хаотического аттрактора. Во взаимно связанных системах Ресслера, как показывают проведенные расчеты, на протяжении всего диапазона изменения параметра ω_1 , приведенного на рис. 8, такой сценарий возникновения фазовой синхронизации не наблюдается. Различия в сценариях, а следовательно, и в

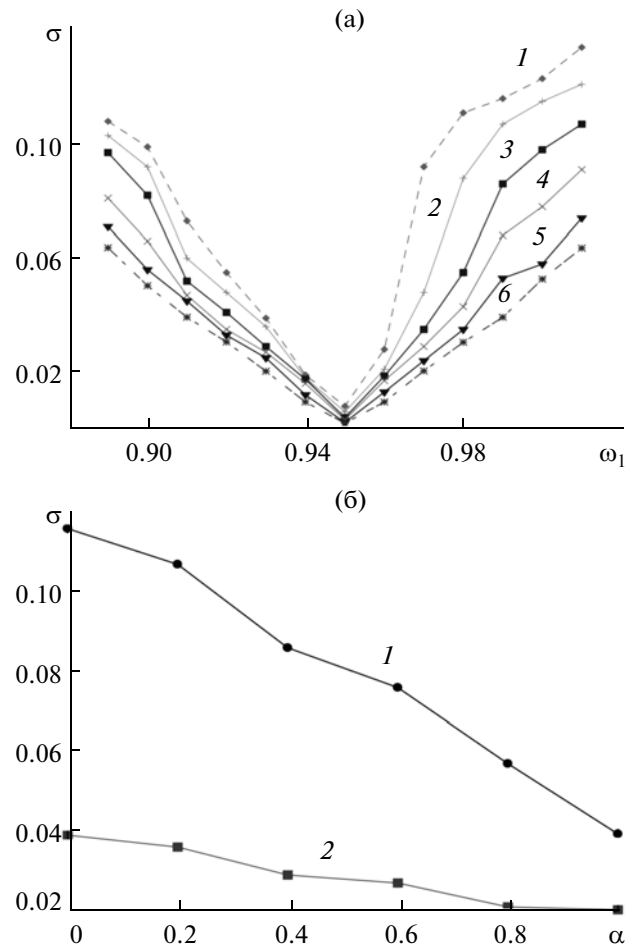


Рис. 8. Границы фазовой синхронизации двух связанных систем Ресслера (14) на плоскости параметров (ω_1, σ) при увеличении параметра α от 0 (кривая 1) до 1 (кривая 2) с шагом 0.2 (а). Зависимость порога фазовой синхронизации от параметра α для случаев относительно большой ($\omega_1 = 0.99$, кривая 1) и относительно слабой ($\omega_1 = 0.93$, кривая 2) расстройки собственных частот (б).

механизмах возникновения синхронных режимов в системах с однонаправленным и взаимным типами связи приводят к изменению характера зависимости границы установления синхронного режима.

Таким образом, для режима фазовой синхронизации соотношение (13) примерно выполняется также в ограниченной области частотной расстройки. В области относительно больших значений расстройки собственных частот для всех рассмотренных типов синхронного поведения соотношение (13) нарушается.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе исследован вопрос о влиянии степени симметричности связи на установление режимов

полной синхронизации, синхронизации с запаздыванием, фазовой и обобщенной синхронизаций. Получена аналитическая зависимость порога возникновения полной синхронизации от коэффициента симметричности связи. В частности, показано, что в двух однонаправлено и взаимно связанных системах пороги ее возникновения находятся в соотношении 2 : 1. Показано, что для других типов синхронного поведения (синхронизации с запаздыванием, фазовой синхронизации) такой четкой закономерности не наблюдается, а подобное соотношение примерно выполняется только в области относительно слабых значений расстройки собственных частот взаимодействующих систем. В то же время в области больших значений частотной расстройки соотношение величин параметра связи, соответствующих установлению синхронного режима в однонаправлено и взаимно связанных системах, является значительно выше.

Между тем независимо от величины расстройки между системами для режимов синхронизации с запаздыванием, полной и фазовой синхронизации порог возникновения синхронного режима снижается при росте параметра симметричности связи. Аналогичное поведение наблюдается для обобщенной синхронизации в области относительно слабых значений расстройки собственных частот. В области больших значений частотной расстройки порог возникновения обобщенной синхронизации слабо зависит от коэффициента взаимности связи.

Работа выполнена при финансовой поддержке федеральной целевой программы “Научные и научно-педагогические кадры инновационной России на 2009–2013 гг.” Фонда некоммерческих программ “Династия” и Международного центра фундаментальной физики (г. Москва).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Glass L.* // Nature (London). 2001. V. 410. P. 277.
2. *Постнов Д.Э., Хан С.К.* // Письма в ЖТФ. 1999. Т. 25. № 4. С. 11.
3. *Anishchenko V.S., Balanov A.G., Janson N.B. et al.* // Int. J. Bifurcation and Chaos. 2000. V. 10. № 10. P. 2339.
4. *Landa P.S., Rabinovitch A.* // Phys. Rev. E. 2000. V. 61. № 2. P. 1829.
5. *Parmananda P.* // Phys. Rev. E. 1997. V. 56. P. 1595.
6. *Дмитриев А.С., Панас А.И.* Динамический хаос: новые носители информации для систем связи. М.: Физматлит, 2002.
7. *Короновский А.А., Москаленко О.И., Храмов А.Е.* // Успехи физ. наук. 2009. Т. 179. № 12. С. 1281.
8. *Трубецков Д.И., Короновский А.А., Храмов А.Е.* // Изв. вузов. Радиофизика. 2004. Т. 47. № 5–6. С. 313.
9. *Fujisaka H., Yamada T.* // Progress of Theoretical Physics. 1983. V. 69. P. 32.
10. *Пиковский А.С.* О взаимодействии странных аттракторов. Препринт № 79. Горький: ИПФ АН СССР, 1983.
11. *Кузнецов С.П.* // Изв. вузов. Радиофизика. 1986. Т. 29. С. 1050.
12. *Афраймович В.С., Веричев И.И., Рабинович М.И.* // Изв. вузов. Радиофизика. 1986. Т. 29. С. 1050.
13. *Pecora L.M., Carroll T.L.* // Phys. Rev. Lett. 1990. V. 64. № 8. P. 821.
14. *Pecora L.M., Carroll T.L.* // Phys. Rev. A. 1991. V. 44. № 4. P. 2374.
15. *Шабунин А.В., Николаев С.М., Астахов В.В.* // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2005. Т. 13. № 5–6. С. 24.
16. *Rosenblum M.C., Pikovsky A.S., Kurths J.* // Phys. Rev. Lett. 1997. V. 78. № 22. P. 4193.
17. *Taherion S., Lai Y.C.* // Phys. Rev. E. 1999. V. 59. № 6. P. R6217.
18. *Rulkov N.F., Sushchik M.M., Tsimring L.S., Abarbanel H.D.I.* // Phys. Rev. E. 1995. V. 51. № 2. P. 980.
19. *Kocarev L., Parlitz U.* // Phys. Rev. Lett. 1996. V. 76. № 11. P. 1816.
20. *Pikovsky A.S., Rosenblum M.G., Kurths J.* Synchronization: a universal concept in nonlinear sciences. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2001.
21. *Anishchenko V.S., Astakhov V., Neiman A. et al.* Nonlinear dynamics of chaotic and stochastic systems, tutorial and modern developments. Heidelberg: Springer-Verlag, 2001.
22. *Короновский А.А., Храмов А.Е.* // Письма в ЖЭТФ. 2004. Т. 79. № 7. С. 391.
23. *Короновский А.А., Москаленко О.И., Храмов А.Е.* // Письма в ЖЭТФ. 2004. Т. 80. № 1. С. 25.
24. *Hramov A.E., Koronovskii A.A.* // Chaos. 2004. V. 14. № 3. P. 603.
25. *Hramov A.E., Koronovskii A.A.* // Physica D. 2005. V. 206. № 3–4. P. 252.
26. *Hramov A.E., Koronovskii A.A., Popov P.V., Rempfen I.S.* // Chaos. 2005. V. 15. № 1. P. 013705.
27. *Boccaletti S., Kurths J., Osipov G.V. et al.* // Phys. Reports. 2002. V. 366. P. 1.
28. *Pyragas K.* // Phys. Rev. E. 1996. V. 54. № 5. P. R1508.
29. *Pecora L.M., Carroll T.L., Heagy J.F.* // Phys. Rev. E. 1995. V. 52. № 4. P. 3420.
30. *Pyragas K.* // Phys. Rev. E. 1997. V. 56. № 5. P. 5183.
31. *Abarbanel H.D.I., Rulkov N.F., Sushchik M.M.* // Phys. Rev. E. 1996. V. 53. № 5. P. 4528.
32. *Parlitz U., Junge L., Lauterborn W.* // Phys. Rev. E. 1996. V. 54. № 2. P. 2115.
33. *Dmitriev B.S., Hramov A.E., Koronovskii A.A. et al.* // Phys. Rev. Lett. 2009. V. 102. № 7. P. 074101.
34. *Rosenblum M.G., Pikovsky A.S., Kurths J.* // Phys. Rev. Lett. 1996. V. 76. № 11. P. 1804.
35. *Osipov G.V., Pikovsky A.S., Rosenblum M.G., Kurths J.* // Phys. Rev. E. 1997. V. 55. № 3. P. 2353.
36. *Pikovsky A.S., Rosenblum M.G., Kurths J.* // Int. J. Bifurcation and Chaos. 2000. V. 10. № 10. P. 2291.

37. *Rosenblum M.G., Kurths J.* // Analysis synchronization phenomena from bivariate data by means of the Hilbert transform. Berlin: Springer, 1998. P. 91.
38. *Pikovsky A.S., Rosenblum M.G., Osipov G.V., Kurths J.* // Physica D. 1997. V. 104. № 4. P. 219.
39. *Rosenblum M.G., Pikovsky A.S., Kurths J.* // Phys. Rev. Lett. 2002. V. 89. № 26. P. 264102.
40. *Chavez M., Hwang D.U., Amann A. et al.* // Phys. Rev. Lett. 2005. V. 94. P. 218701.
41. *Hramov A.E., Khramova A.E., Koronovskii A.A., Boccaletti S.* // IJBC. 2008. V. 18. № 3. P. 258.
42. *Benettin G., Galgani L., Giorgilli A., Strelcyn J.M.* // Meccanica. 1980. V. 15. P. 9.
43. *Pecora L.M., Carroll T.L.* // Phys. Rev. Lett. 1998. V. 80. № 10. P. 2109.
44. *Hramov A.E., Koronovskii A.A.* // Phys. Rev. E. 2005. V. 71. № 6. P. 067201.
45. *Hramov A.E., Koronovskii A.A., Moskalenko O.I.* // Europhys. Lett. 2005. V. 72. № 6. P. 901.
46. *Moskalenko O.I., Koronovskii A.A., Hramov A.E., Shurygina S.A.* // Proc. 18th IEEE Workshop on Non-linear Dynamics of Electronic Systems. Dresden, Germany, 2010. P. 70.
47. *Короновский А.А., Москаленко О.И., Храмов А.Е.* // РЭ. 2007. Т. 52. № 8. С. 949.
48. *Москаленко О.И.* // ЖТФ. 2010. Т. 80. № 8. С. 1.
49. *Короновский А.А., Куровская М.К., Москаленко О.И., Храмов А.Е.* // ЖТФ. 2007. Т. 77. № 1. С. 21.
50. *Hramov A.E., Koronovskii A.A., Kurovskaya M.K.* // Phys. Rev. E. 2007. V. 75. № 3. P. 036205.