



## ПЕРЕМЕЖАЮЩЕЕСЯ ПОВЕДЕНИЕ ВБЛИЗИ ГРАНИЦЫ ФАЗОВОЙ ХАОТИЧЕСКОЙ СИНХРОНИЗАЦИИ НА РАЗЛИЧНЫХ ВРЕМЕННЫХ МАСШТАБАХ\*

*М.О. Журавлев, А.А. Короновский, О.И. Москаленко, А.Е. Храмов*

Приведены результаты изучения перемежающегося поведения вблизи границы фазовой хаотической синхронизации на различных временных масштабах наблюдения. Показано, что ниже границы фазовой синхронизации при определенных значениях параметра связи и на определенных временных масштабах процессы перемежаемости типа игольного ушка и кольца будут наблюдаться одновременно. В работе построена теория данного типа перемежающегося поведения, возникающего на границе установления режимов хаотической синхронизации при анализе динамики систем на различных временных масштабах.

*Ключевые слова:* Перемежаемость, фазовая хаотическая синхронизация, хаотические осцилляторы, временной масштаб, динамическая система.

### Введение

Наличие перемежаемости характерно для многих нелинейных систем. Наблюдается перемежаемость, в частности, при переходе от периодических колебаний к хаотическим [1], а также вблизи границы возникновения различных режимов хаотической синхронизации связанных осцилляторов [2–5].

Существует определенная классификация перемежающегося поведения, в частности, выделяют перемежаемость типов I–III [1, 6], on–off перемежаемость [7], перемежаемость игольного ушка [8], перемежаемость кольца [9]. Несмотря на некоторое сходство (наличие во временном ряду двух различных режимов, чередующихся друг с другом), каждый тип перемежаемости обладает своими собственными особенностями и характеристиками (прежде всего, это зависимость средней длительности ламинарных фаз от управляющего параметра и распределение длительностей ламинарных фаз). Причины, приводящие к возникновению перемежающегося поведения каждого типа, также различны.

\*Статья написана по материалам конференции «Хаотические автоколебания и образование структур», Саратов, 4–9 октября, 2010.

В научной литературе описано существование двух типов перемежающегося поведения для хаотических систем, наблюдающихся при разрушении режима фазовой синхронизации в случае, когда собственные частоты осциллятора и внешнего сигнала различаются мало [8, 10, 11], и, соответственно, выделяют два значения параметра связи  $\sigma_1 < \sigma_2$ , являющиеся характерными точками, разграничивающими различные типы динамики. Ниже границы режима фазовой синхронизации  $\sigma_2$  динамика разности фаз  $\Delta\varphi(t)$  содержит участки синхронной динамики (ламинарные фазы), постоянно прерываемые внезапными фазовыми проскоками (турбулентные фазы), в течение которых значение  $|\Delta\varphi(t)|$  изменяется на  $2\pi$ . Проанализировав статистику длительностей ламинарных фаз, можно заключить, что ниже величины связи  $\sigma_1$  (то есть достаточно далеко от границы установления/разрушения режима хаотической фазовой синхронизации  $\sigma_2$ ) наблюдается перемежаемость типа I. Для величины связи  $\sigma \in (\sigma_1; \sigma_2)$  наблюдается сверхдлинное ламинарное поведение (так называемая перемежаемость игольного ушка), характеристики которого существенно отличаются от хорошо известных характеристик перемежаемости типа I. Выше критической точки  $\sigma_2$  обнаруживается режим фазовой синхронизации (с формальной точки зрения синхронный режим может рассматриваться как существование одной ламинарной фазы с бесконечной длительностью). Для средней длительности ламинарных фаз в случае перемежаемости типа I имеет место степенная зависимость от параметра надкритичности  $T \sim (\sigma_1 - \sigma)^{-1/2}$ , а в случае перемежаемости игольного ушка эта зависимость, как показано в предыдущих исследованиях (см., например, работы [8, 11]), выражается законом

$$T \sim \exp(k|\sigma_2 - \sigma|^{-1/2}) \quad (1)$$

или

$$-\ln(1/T) = c_0 - c_1|\sigma_2 - \sigma|^{-1/2} \quad (2)$$

( $c_0$ ,  $c_1$  и  $k$  – константы), приведенным впервые в [12] для статистики переходного процесса, предшествующего точке бифуркации слияния пары неустойчивых орбит.

Таким образом, на плоскости управляющих параметров существует область, примыкающая снизу к границе фазовой синхронизации, где система демонстрирует перемежающееся поведение, характеристики которого соответствуют перемежаемости игольного ушка. Очевидно, что основные особенности в поведении взаимодействующих систем, обусловленные разрушением синхронного режима, будут проявляться в непосредственной близости от границы, то есть там, где в случае малых расстройек диагностируется режим перемежаемости игольного ушка. Именно поэтому далее внимание сосредоточено, в основном, на этом типе перемежающегося поведения.

Теоретическое объяснение явления перемежаемости игольного ушка основано на граничном кризисе синхронных аттракторов, вызванном бифуркацией слияния неустойчивых орбит, одни из которых являются седловыми, а другие – неустойчивы по всем направлениям [8, 10]. Данный тип перемежающегося поведения наблюдался как при численном моделировании [8, 11], так и в эксперименте [14] для различных нелинейных систем, включая осцилляторы Ресслера.

Область значений параметров вблизи границы установления синхронного хаотического режима, в которой для связанных хаотических осцилляторов наблюдается

режим перемежаемости игольного ушка, представляет также интерес с точки зрения рассмотрения динамики систем на различных временных масштабах [15, 16]. Как известно, при таком рассмотрении в случае режима фазовой синхронизации существует диапазон синхронных временных масштабов, к которому примыкают диапазоны асинхронных временных масштабов. Ниже границы фазовой синхронизации, при значении параметра связи между осцилляторами, соответствующем перемежаемости игольного ушка, могут быть выделены временные масштабы, на которых помимо перемежаемости игольного ушка будет наблюдаться перемежающееся поведение типа кольца [9], обычно реализующееся вблизи границы фазовой синхронизации в случае, если параметры взаимодействующих систем расстроены достаточно сильно. Иными словами, при определенных значениях параметра связи и на определенных временных масштабах оба процесса перемежаемости будут наблюдаться одновременно (можно сказать, что будет наблюдаться *перемежаемость перемежаемостей*).

### 1. Распределение длительностей ламинарных фаз

Как известно, распределение длительностей ламинарных фаз как в случае перемежаемости игольного ушка, так и в случае перемежаемости кольца, подчиняется экспоненциальному закону (см. [13] для перемежаемости игольного ушка и [9] для перемежаемости кольца). Иными словами, при выбранных значениях управляющих параметров плотность вероятности наблюдения ламинарной фазы длительностью  $s$  для перемежаемости кольца будет определяться соотношением

$$p_r(s) = \frac{1}{T_r} \exp\left(-\frac{s}{T_r}\right), \quad (3)$$

а ламинарной фазы длительностью  $l$  для перемежаемости игольного ушка – соотношением

$$p_e(l) = \frac{1}{T_e} \exp\left(-\frac{l}{T_e}\right), \quad (4)$$

где  $T_r$ ,  $T_e$  – средние длительности ламинарных фаз перемежаемости кольца и игольного ушка, соответственно. Очевидно, что для обеих плотностей вероятностей (3) и (4) выполняется условие нормировки

$$\int_0^{+\infty} p_{r,e}(t) dt = 1. \quad (5)$$

Как уже отмечалось выше, существует такая область значений параметра связи и такой диапазон временных масштабов, где одновременно наблюдаются как перемежаемость кольца, так и перемежаемость игольного ушка. В этом случае в анализируемой временной реализации наблюдаются фазовые проскоки, соответствующие либо одному, либо другому типу перемежаемости. Можно говорить, что в этом случае оба процесса перемежающегося поведения протекают одновременно (параллельно), при этом реализуются турбулентные фазы, отвечающие то одному, то другому типу перемежаемости. Распределение длительностей ламинарных фаз в этом случае будет определяться плотностью вероятности  $p(\tau)$  наблюдения ламинарной фазы длительностью  $\tau$ .

Проведем аналитический вывод данной плотности вероятности. Выберем произвольно один из фазовых проскоков в анализируемой временной реализации системы связанных хаотических осцилляторов, демонстрирующих на выбранном временном масштабе оба типа перемежающегося поведения. Без ограничения общности можно предположить, что выбранный таким образом фазовый проскок соответствует перемежаемости игольного ушка. Тогда вероятность ламинарной фазы длительностью, попадающей в интервал  $[\tau; \tau + d\tau)$ , будет определяться суммой вероятностей событий, которые можно считать независимыми друг от друга – наблюдения через интервал времени  $t \in [\tau; \tau + d\tau)$  фазовых проскоков перемежаемости типа либо игольного ушка, либо кольца. Чтобы через интервал времени  $t \in [\tau; \tau + d\tau)$  наблюдался фазовый проскок, отвечающий перемежаемости кольца, необходимо, чтобы для перемежаемости игольного ушка реализовалась ламинарная фаза длительностью  $l > \tau$ , для перемежаемости кольца в момент времени, соответствующий началу рассмотрения, реализовалась ламинарная фаза длительностью  $s > \tau$ , причем эта фаза должна закончиться через время  $t \in [\tau; \tau + d\tau)$ . Вероятность  $P_1$  того, что в рассматриваемый момент времени для перемежаемости игольного ушка начинает реализовываться ламинарная фаза длительностью  $l > \tau$  и одновременно для перемежаемости кольца наблюдается ламинарная фаза длительностью  $s > \tau$  и эта фаза заканчивается через время  $t \in [\tau; \tau + d\tau)$ , определяется соотношением

$$P_1 = \frac{d\tau}{s} p_e(l) p_r(s) dl ds. \quad (6)$$

С учетом того, что длительности  $s$  и  $l$  рассматриваемых ламинарных фаз, отвечающих режимам перемежаемости кольца и игольного ушка, могут быть любыми (превышающими  $\tau$ ), для того чтобы реализовалась ламинарная фаза длительностью, попадающей в диапазон  $[\tau; \tau + d\tau)$ , вероятность того, что после фазового проскока, обусловленного механизмами перемежаемости игольного ушка, будет наблюдаться ламинарная фаза длительностью, попадающей в диапазон  $[\tau; \tau + d\tau)$  и заканчивающаяся фазовым проскоком, обусловленным механизмом перемежаемости кольца, будет равна

$$P_{ER}(\tau) = d\tau \int_{\tau}^{\infty} \frac{p_r(s)}{s} ds \int_{\tau}^{\infty} p_e(l) dl. \quad (7)$$

С учетом (3) и (4) соотношение (7) может быть вычислено как

$$\begin{aligned} P_{ER}(\tau) &= d\tau \int_{\tau}^{\infty} \frac{1}{sT_r} \exp\left(-\frac{s}{T_r}\right) ds \int_{\tau}^{\infty} \frac{1}{T_e} \exp\left(-\frac{l}{T_e}\right) dl = \\ &= \frac{d\tau}{T_r} \Gamma\left(0, \frac{\tau}{T_r}\right) \exp\left(-\frac{\tau}{T_e}\right), \end{aligned} \quad (8)$$

где  $\Gamma(a, z)$  – неполная гамма-функция.

Аналогично, в рассматриваемой системе будет наблюдаться ламинарный участок поведения длительностью, попадающей в диапазон  $[\tau; \tau + d\tau)$ , и начинающийся с фазового проскока, обусловленного перемежаемостью игольного ушка, если через время  $t \in [\tau; \tau + d\tau)$  произойдет фазовый проскок, обусловленный также перемежаемостью игольного ушка. Для этого необходимо, чтобы для перемежаемости игольного ушка реализовалась ламинарная фаза длительностью из диапазона  $[\tau; \tau + d\tau)$ , для

перемежаемости кольца в момент времени, соответствующий началу рассмотрения, реализовалась ламинарная фаза длительностью  $s > \tau$ , причем эта фаза не должна закончиться в течение времени  $t \in [\tau; \tau + d\tau)$ .

Вероятность того, что в рассматриваемый момент времени для перемежаемости игольного ушка начинает реализоваться ламинарная фаза длительностью, попадающей в диапазон  $[\tau; \tau + d\tau)$ , и, одновременно, для перемежаемости кольца наблюдается ламинарная фаза длительностью  $s > \tau$  и эта фаза не заканчивается в течение времени  $t \in [\tau; \tau + d\tau)$ , определяется соотношением

$$P_2 = \left(1 - \frac{\tau}{s}\right) p_e(\tau) p_r(s) d\tau ds. \quad (9)$$

С учетом того, что длительность  $s$  рассматриваемой ламинарной фазы, отвечающей режиму перемежаемости кольца, может быть любой (превышающей  $\tau$ ), для того чтобы реализовалась ламинарная фаза длительностью, попадающей в диапазон  $[\tau; \tau + d\tau)$ , вероятность того, что после фазового проскока, обусловленного механизмами перемежаемости игольного ушка, будет наблюдаться ламинарная фаза длительностью, попадающей в диапазон  $[\tau; \tau + d\tau)$ , и заканчивающаяся фазовым проскоком, обусловленным также механизмом перемежаемости игольного ушка, будет

$$P_{EE}(\tau) = p_e(\tau) d\tau \int_{\tau}^{\infty} \left(1 - \frac{\tau}{s}\right) p_r(s) ds. \quad (10)$$

С учетом (3) и (4) соотношение (10) может быть записано в виде

$$\begin{aligned} P_{EE}(\tau) &= \frac{1}{T_e} \exp\left(-\frac{\tau}{T_e}\right) d\tau \int_{\tau}^{\infty} \left(1 - \frac{\tau}{s}\right) \frac{1}{T_r} \exp\left(-\frac{s}{T_r}\right) ds = \\ &= \frac{d\tau}{T_e} \exp\left(-\frac{\tau}{T_e}\right) \left[ \exp\left(-\frac{\tau}{T_r}\right) - \frac{\tau}{T_r} \Gamma\left(0, \frac{\tau}{T_r}\right) \right]. \end{aligned} \quad (11)$$

Полученные соотношения (8) и (11) описывают вероятность возникновения ламинарной фазы длительностью, попадающей в диапазон  $[\tau; \tau + d\tau)$  при условии, что турбулентный проскок, с которого начато рассмотрение, обусловливается механизмом перемежаемости игольного ушка. В то же самое время, возможна ситуация, что начальный фазовый проскок был обусловлен перемежаемостью кольца. Если средняя длительность ламинарной фазы перемежаемости кольца  $T_r$ , а перемежаемости игольного ушка  $T_e$ , то на достаточно длительном интервале наблюдения  $L$  будет зафиксировано  $N_e = L/T_e$  фазовых проскоков, обусловленных перемежаемостью игольного ушка, и  $N_r = L/T_r$  фазовых проскоков, обусловленных перемежаемостью кольца. Тогда вероятность того, что произвольно выбранный для начального рассмотрения фазовый проскок определяется механизмами перемежаемости игольного ушка, будет

$$P_e = \frac{N_e}{N_e + N_r} = \frac{T_r}{T_e + T_r}, \quad (12)$$

и, аналогично, вероятность того, что произвольно выбранный для начального рассмотрения фазовый проскок определяется механизмами перемежаемости кольца, будет определяться соотношением

$$P_r = \frac{N_r}{N_e + N_r} = \frac{T_e}{T_e + T_r}. \quad (13)$$

Совершенно аналогично, вероятность того, что после фазового проскока, обусловленного механизмами перемежаемости кольца, будет наблюдаться ламинарная фаза длительностью, попадающей в диапазон  $[\tau; \tau + d\tau]$ , и заканчивающаяся фазовым проскоком, обусловленным механизмом перемежаемости игольного ушка, будет равна

$$P_{RE}(\tau) = d\tau \int_{\tau}^{\infty} \frac{1}{lT_e} \exp\left(-\frac{l}{T_e}\right) dl \int_{\tau}^{\infty} \frac{1}{T_r} \exp\left(-\frac{s}{T_r}\right) ds =$$

$$= \frac{d\tau}{T_e} \Gamma\left(0, \frac{\tau}{T_e}\right) \exp\left(-\frac{\tau}{T_r}\right), \quad (14)$$

а вероятность того, что после фазового проскока, обусловленного механизмами перемежаемости кольца, будет наблюдаться ламинарная фаза длительностью, попадающей в диапазон  $[\tau; \tau + d\tau]$ , и заканчивающаяся фазовым проскоком, обусловленным также механизмом перемежаемости кольца, будет равна

$$P_{RR}(\tau) = \frac{1}{T_r} \exp\left(-\frac{\tau}{T_r}\right) d\tau \int_{\tau}^{\infty} \left(1 - \frac{\tau}{l}\right) \frac{1}{T_r} \exp\left(-\frac{l}{T_e}\right) dl =$$

$$= \frac{d\tau}{T_r} \exp\left(-\frac{\tau}{T_r}\right) \left[ \exp\left(-\frac{\tau}{T_e}\right) - \frac{\tau}{T_e} \Gamma\left(0, \frac{\tau}{T_e}\right) \right]. \quad (15)$$

Тогда, с учетом всего вышеизложенного, вероятность наблюдать в рассматриваемой системе ламинарный участок поведения длительностью, попадающей в диапазон  $[\tau; \tau + d\tau]$ , будет определяться соотношением

$$P(\tau) = p(\tau) d\tau = P_e [P_{ER}(\tau) + P_{EE}(\tau)] + P_r [P_{RE}(\tau) + P_{RR}(\tau)], \quad (16)$$

где  $p(\tau)$  – плотность вероятности наблюдения в рассматриваемой системе ламинарный участок поведения длительностью, попадающей в диапазон  $[\tau; \tau + d\tau]$ .

С учетом соотношений (8), (11)–(16) плотность вероятности  $p(\tau)$ , определяющая распределение длительностей ламинарных фаз, примет вид

$$p(\tau) = \frac{1}{T_e + T_r} \Gamma\left(0, \frac{\tau}{T_r}\right) \exp\left(-\frac{\tau}{T_e}\right) + \frac{T_r}{T_e(T_e + T_r)} \exp\left(-\frac{\tau}{T_e}\right) \exp\left(-\frac{\tau}{T_r}\right) -$$

$$- \frac{\tau}{T_e(T_e + T_r)} \Gamma\left(0, \frac{\tau}{T_r}\right) \exp\left(-\frac{\tau}{T_e}\right) + \frac{1}{T_e + T_r} \Gamma\left(0, \frac{\tau}{T_e}\right) \exp\left(-\frac{\tau}{T_r}\right) +$$

$$+ \frac{T_e}{T_r(T_e + T_r)} \exp\left(-\frac{\tau}{T_r}\right) \exp\left(-\frac{\tau}{T_e}\right) - \frac{\tau}{T_r(T_e + T_r)} \Gamma\left(0, \frac{\tau}{T_e}\right) \exp\left(-\frac{\tau}{T_r}\right). \quad (17)$$

## 2. Верификация полученного выражения для плотности вероятности

Полученное аналитически в предыдущем разделе выражение (17), описывающее плотность вероятности длительностей ламинарных фаз, должно быть верифицировано как с точки зрения выполнения условия нормировки

$$\int_0^{+\infty} p(\tau) d\tau = 1 \quad (18)$$

(являющегося следствием факта, что вероятность того, что будет наблюдаться ламинарный участок поведения *любой* длительности, равна единице), так и с точки зрения предельного перехода, когда средняя длительность участка ламинарного поведения  $T_r$ , обусловливаемого механизмами перемежаемости кольца, стремится к бесконечности. Такой предельный переход является отражением ситуации, когда рассматривается поведение связанных осцилляторов, демонстрирующих перемежаемость игольного ушка, на таких временных масштабах, когда механизмы, отвечающие за перемежаемость кольца, еще не реализуются. Вычисление определенного интеграла (18) в пределах от нуля до бесконечности от плотности вероятности (17) дает

$$\begin{aligned} & \int_0^{+\infty} p(\tau) d\tau = \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{T_e + T_r} \Gamma\left(0, \frac{\tau}{T_r}\right) \exp\left(-\frac{\tau}{T_e}\right) d\tau + \int_0^{+\infty} \frac{T_r}{T_e(T_e + T_r)} \exp\left(-\frac{\tau}{T_e}\right) \exp\left(-\frac{\tau}{T_r}\right) d\tau - \\ & - \int_0^{+\infty} \frac{\tau}{T_e(T_e + T_r)} \Gamma\left(0, \frac{\tau}{T_r}\right) \exp\left(-\frac{\tau}{T_e}\right) d\tau + \int_0^{+\infty} \frac{1}{T_e + T_r} \Gamma\left(0, \frac{\tau}{T_e}\right) \exp\left(-\frac{\tau}{T_r}\right) d\tau + \\ & + \int_0^{+\infty} \frac{T_e}{T_r(T_e + T_r)} \exp\left(-\frac{\tau}{T_r}\right) \exp\left(-\frac{\tau}{T_e}\right) d\tau - \int_0^{+\infty} \frac{\tau}{T_r(T_e + T_r)} \Gamma\left(0, \frac{\tau}{T_e}\right) \exp\left(-\frac{\tau}{T_r}\right) d\tau = \\ &= \frac{T_e}{T_e + T_r} \log\left(\frac{T_e + T_r}{T_e}\right) + \frac{T_r^2}{(T_e + T_r)^2} - \left[ \frac{T_e}{T_e + T_r} \log\left(\frac{T_e + T_r}{T_e}\right) - \frac{T_e T_r}{(T_e + T_r)^2} \right] + \\ & + \frac{T_r}{T_e + T_r} \log\left(\frac{T_e + T_r}{T_r}\right) + \frac{T_e^2}{(T_e + T_r)^2} - \left[ \frac{T_r}{T_e + T_r} \log\left(\frac{T_e + T_r}{T_r}\right) - \frac{T_e T_r}{(T_e + T_r)^2} \right] = \\ &= \frac{T_r^2}{(T_e + T_r)^2} + \frac{2T_e T_r}{(T_e + T_r)^2} + \frac{T_e^2}{(T_e + T_r)^2} = \frac{(T_e + T_r)^2}{(T_e + T_r)^2} = 1. \end{aligned} \quad (19)$$

Таким образом, как следует из (19), полученное выражение (17) для плотности вероятности наблюдать в рассматриваемой системе ламинарный участок поведения длительностью, попадающей в диапазон  $[\tau; \tau + d\tau)$ , удовлетворяет условию нормировки (18).

Аналогично, предельный переход, исключая из рассмотрения перемежаемость кольца,

$$\begin{aligned}
\lim_{T_r \rightarrow +\infty} p(\tau) &= \lim_{T_r \rightarrow +\infty} \frac{1}{T_e + T_r} \Gamma\left(0, \frac{\tau}{T_r}\right) \exp\left(-\frac{\tau}{T_e}\right) + \\
&+ \lim_{T_r \rightarrow +\infty} \frac{T_r}{T_e(T_e + T_r)} \exp\left(-\frac{\tau}{T_e}\right) \exp\left(-\frac{\tau}{T_r}\right) - \lim_{T_r \rightarrow +\infty} \frac{\tau}{T_e(T_e + T_r)} \Gamma\left(0, \frac{\tau}{T_r}\right) \exp\left(-\frac{\tau}{T_e}\right) + \\
&+ \lim_{T_r \rightarrow +\infty} \frac{1}{T_e + T_r} \Gamma\left(0, \frac{\tau}{T_e}\right) \exp\left(-\frac{\tau}{T_r}\right) + \lim_{T_r \rightarrow +\infty} \frac{T_e}{T_r(T_e + T_r)} \exp\left(-\frac{\tau}{T_r}\right) \exp\left(-\frac{\tau}{T_e}\right) - \\
&- \lim_{T_r \rightarrow +\infty} \frac{\tau}{T_r(T_e + T_r)} \Gamma\left(0, \frac{\tau}{T_e}\right) \exp\left(-\frac{\tau}{T_r}\right) = 0 + \frac{1}{T_e} \exp\left(-\frac{\tau}{T_e}\right) - 0 + 0 + 0 - 0 = \\
&= \frac{1}{T_e} \exp\left(-\frac{\tau}{T_e}\right)
\end{aligned} \tag{20}$$

приводит к плотности распределения вероятностей (4) нахождения ламинарного участка поведения с длительностью, попадающей в диапазон  $[\tau; \tau + d\tau]$ , которая соответствует перемежаемости игольного ушка.

### 3. Средняя длительность ламинарных фаз

Одной из важнейших характеристик перемежающегося поведения является зависимость средней длительности ламинарных фаз от управляющих параметров, при этом в качестве параметра часто рассматривается «параметр надкритичности», характеризующий отклонение значения управляющего параметра от бифуркационной точки. В рассматриваемом случае, когда во временной реализации системы одновременно наблюдаются как перемежаемость кольца, так и перемежаемость игольного ушка, а распределение длительностей ламинарных фаз определяется плотностью вероятности (17), средняя длительность ламинарных участков поведения имеет вид

$$\begin{aligned}
\langle \tau \rangle &= \int_0^{+\infty} \tau p(\tau) d\tau = \int_0^{+\infty} \frac{\tau}{T_e + T_r} \Gamma\left(0, \frac{\tau}{T_r}\right) \exp\left(-\frac{\tau}{T_e}\right) d\tau + \\
&+ \int_0^{+\infty} \frac{T_r \tau}{T_e(T_e + T_r)} \exp\left(-\frac{\tau}{T_e}\right) \exp\left(-\frac{\tau}{T_r}\right) d\tau - \int_0^{+\infty} \frac{\tau^2}{T_e(T_e + T_r)} \Gamma\left(0, \frac{\tau}{T_r}\right) \exp\left(-\frac{\tau}{T_e}\right) d\tau + \\
&+ \int_0^{+\infty} \frac{\tau}{T_e + T_r} \Gamma\left(0, \frac{\tau}{T_e}\right) \exp\left(-\frac{\tau}{T_r}\right) d\tau + \int_0^{+\infty} \frac{T_e \tau}{T_r(T_e + T_r)} \exp\left(-\frac{\tau}{T_r}\right) \exp\left(-\frac{\tau}{T_e}\right) d\tau - \\
&- \int_0^{+\infty} \frac{\tau^2}{T_r(T_e + T_r)} \Gamma\left(0, \frac{\tau}{T_e}\right) \exp\left(-\frac{\tau}{T_r}\right) d\tau = \left[ \frac{T_e^2}{T_e + T_r} \log\left(\frac{T_e + T_r}{T_e}\right) - \frac{T_e^2 T_r}{(T_e + T_r)^2} \right] + \frac{T_e T_r^3}{(T_e + T_r)^3} -
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& - \left[ \frac{2T_e^2}{T_e+T_r} \log \left( \frac{T_e+T_r}{T_e} \right) - \frac{T_e^2 T_r (2T_e+3T_r)}{(T_e+T_r)^3} \right] + \left[ \frac{T_r^2}{T_e+T_r} \log \left( \frac{T_e+T_r}{T_r} \right) - \frac{T_r^2 T_e}{(T_e+T_r)^2} \right] + \frac{T_r T_e^3}{(T_e+T_r)^3} - \\
& - \left[ \frac{2T_r^2}{T_e+T_r} \log \left( \frac{T_e+T_r}{T_r} \right) - \frac{T_r^2 T_e (2T_r+3T_e)}{(T_e+T_r)^3} \right] = - \frac{T_e^2 \log \left( \frac{T_e+T_r}{T_e} \right) - 2T_e T_r + T_r^2 \log \left( \frac{T_e+T_r}{T_r} \right)}{T_e+T_r}.
\end{aligned} \tag{21}$$

В случае предельного перехода  $T_r \rightarrow +\infty$ , исключающего из рассмотрения перемежаемость кольца, средняя длительность ламинарной фазы наблюдаемого поведения стремится к средней длительности ламинарной фазы перемежаемости игольчатого ушка:

$$\begin{aligned}
\lim_{T_r \rightarrow +\infty} \langle \tau \rangle &= - \lim_{T_r \rightarrow +\infty} \frac{T_e^2 \log \left( \frac{T_e+T_r}{T_e} \right) - 2T_e T_r + T_r^2 \log \left( \frac{T_e+T_r}{T_r} \right)}{T_e + T_r} = \\
&= - \lim_{T_r \rightarrow +\infty} \frac{T_e^2}{T_e + T_r} \log \left( \frac{T_e + T_r}{T_e} \right) + \lim_{T_r \rightarrow +\infty} \frac{2T_e T_r}{T_e + T_r} - \\
&= - \lim_{T_e \rightarrow +\infty} \frac{T_r^2}{T_e + T_r} \log \left( \frac{T_e + T_r}{T_r} \right) = -0 + 2T_e - T_e = T_e.
\end{aligned} \tag{22}$$

#### 4. Пример сосуществования двух типов перемежаемости в связанных осцилляторах Ресслера

Для того чтобы проиллюстрировать полученные результаты, рассмотрим на различных временных масштабах  $s$  поведение двух однонаправленно связанных хаотических осцилляторов Ресслера, находящихся вблизи границы фазовой синхронизации:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= -\omega_1 y_1 - z_1, \\
\dot{y}_1 &= \omega_1 x_1 + a y_1, \\
\dot{z}_1 &= p + z_1(x_1 - c), \\
\dot{x}_2 &= -\omega_2 y_2 - z_2 + \varepsilon(x_1 - x_2), \\
\dot{y}_2 &= \omega_2 x_2 + a y_2, \\
\dot{z}_2 &= p + z_2(x_2 - c).
\end{aligned} \tag{23}$$

В соотношении (23)  $x, y$ , – координаты ведущей (1) и ведомой (2) системы,  $\varepsilon$  характеризует силу связи между осцилляторами. Остальные значения параметров были выбраны по аналогии с предыдущими работами [17, 18]:  $a = 0.15$ ,  $p = 0.2$ ,  $c = 10.0$ ,  $\omega_2 = 0.95$ ,  $\omega_1 = 0.93$ . Для выделения ламинарных фаз во временных реализациях взаимодействующих систем использовался подход, описанный в [19].

Рассмотрение поведения связанных хаотических систем на различных временных масштабах [15, 16] основано на введении непрерывного множества фаз исследуемых сигналов с помощью непрерывного вейвлетного преобразования

$$W(s, t_0) = \frac{1}{\sqrt{s}} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \psi^* \left( \frac{t - t_0}{s} \right) dt, \tag{24}$$

с материнским вейвлетом Морле

$$\psi(\eta) = \frac{1}{\sqrt[4]{\pi}} \exp(j\Omega_0\eta) \exp\left(\frac{-\eta^2}{2}\right), \quad (25)$$

$$\Omega_0 = 2\pi.$$

Вейвлетная поверхность

$$W(s, t_0) = |W(s, t_0)| e^{j\varphi_s(t_0)} \quad (26)$$

характеризует поведение системы на каждом временном масштабе  $s$  в любой момент времени  $t_0$ . Величина  $|W(s, t_0)|$  характеризует наличие и интенсивность соответствующего временного масштаба  $s$  в момент времени  $t_0$ . Как правило, в рассмотрение также вводят мгновенное значение

$$E(s, t_0) = |W(s, t_0)|^2 \quad (27)$$

и интегральное

$$\langle E(s) \rangle = \int |W(s, t_0)|^2 dt_0 \quad (28)$$

распределения энергии по временным масштабам.

Оказывается, что при использовании вейвлетного преобразования (24) для каждого временного масштаба  $s$  естественным образом оказывается определена непрерывная фаза  $\varphi(s, t) = \arg W(s, t)$ . Иными словами, оказывается возможным характеризовать поведение каждого временного масштаба  $s$  с помощью ассоциированной с ним фазы  $\varphi(s, t)$ , являющейся непрерывной функцией временного масштаба  $s$  и времени  $t$ . Введенное в рассмотрение таким образом семейство фаз наиболее полным образом характеризует поведение связанных систем: возможно описать поведение каждого временного масштаба с помощью ассоциированной с ним фазы  $\varphi(s, t)$ .

Для выбранных значений параметров синхронный режим устанавливается при значении параметра связи  $\varepsilon_c \approx 0.045$ , при этом синхронные временные масштабы лежат в диапазоне  $s \in [s_l; s_h]$ ,  $s_l = 4.99$ ,  $s_h = 8.25$ .

Для того чтобы разделить перемежаемость игольного ушка и перемежаемость кольца, можно использовать рассмотрение динамики систем на вращающейся плоскости. Этот подход был впервые предложен в работах [9,20] и заключается в том, что переменные (в данном случае  $x_{1,2} = \operatorname{Re} W_{1,2}(s, t)$  и  $y_{1,2} = \operatorname{Im} W_{1,2}(s, t)$ ) рассматриваются на плоскости, вращающейся вокруг начала координат [9]

$$\begin{aligned} x' &= x_1 \cos \varphi_2(s, t) + y_1 \sin \varphi_2(s, t), \\ y' &= -x_1 \sin \varphi_2(s, t) + y_1 \cos \varphi_2(s, t). \end{aligned} \quad (29)$$

В этом случае оба типа перемежающегося поведения легко могут быть детектированы и разделены: сгусток фазовых траекторий на плоскости  $(x'; y')$ , который выглядит как зашумленная неподвижная устойчивая точка (рис. 1, *a*) соответствует синхронной динамике взаимодействующих осцилляторов [20]; начало вращения фазовой траектории вокруг центра (рис. 1, *б*) свидетельствует о наличии перемежаемости игольного ушка [20], в то время как перемежаемость кольца проявляется в охвате начала координат фазовой траекторией (см. [9]), как это показано на рис. 1, *в*.

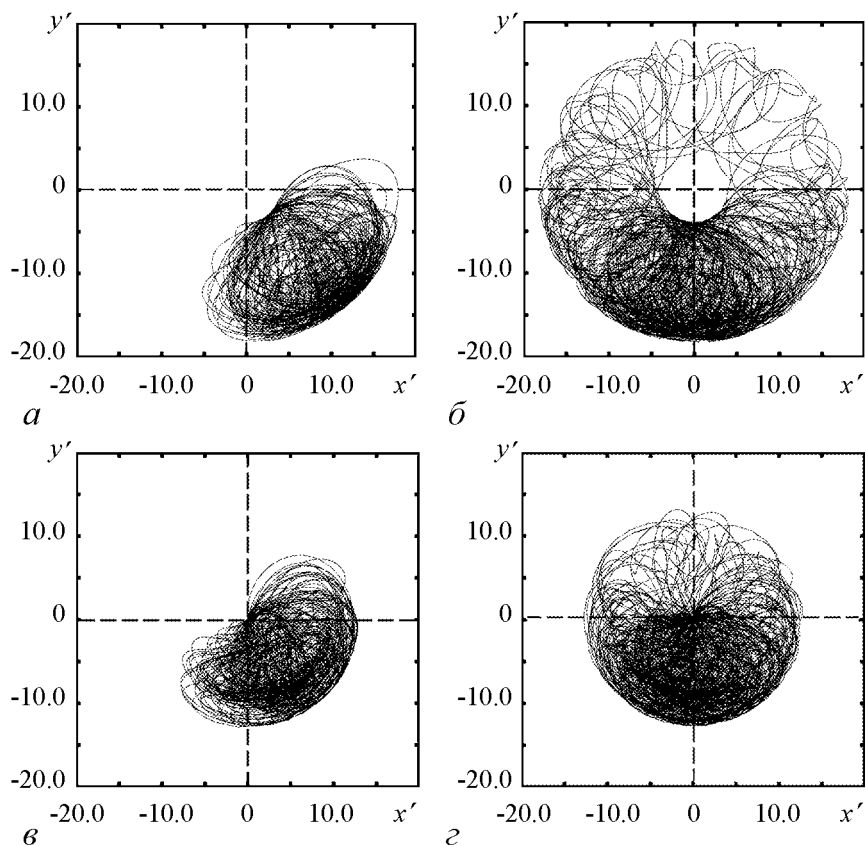


Рис. 1. Фазовая траектория ведомой системы на плоскости  $(x', y')$ , вращающейся вокруг начала координат:  $a - \varepsilon = 0.45, s = 5.50$  – синхронный режим;  $b - \varepsilon = 0.32, s = 5.50$  – перемежаемость игольного ушка;  $v - \varepsilon = 0.45, s = 4.99$  – перемежаемость кольца;  $z - \varepsilon = 0.32, s = 4.99$  – сосуществование двух типов перемежающегося поведения

Из рис. 1,  $a-v$  видно, что можно выделить области значений параметра связи  $\varepsilon$  и временных масштабов, где наблюдается либо перемежаемость игольного ушка (см. рис. 1,  $b$ ), либо перемежаемость кольца (см. рис. 1,  $v$ ). Существуют также области значений параметра связи и временных масштабов, для которых оба данных явления наблюдаются одновременно (рис. 1,  $z$ ). Это означает, что перемежаемость игольного ушка прерывается перемежаемостью кольца, и наоборот. Таким образом, наблюдается одновременное существование двух типов перемежаемостей. В этом режиме фазовая траектория на плоскости  $(x', y')$  вращается вокруг начала координат (что является проявлением перемежаемости игольного ушка) и время от времени охватывает начало координат, что свидетельствует о наличии перемежаемости кольца.

Плотности вероятности распределения длительностей ламинарных фаз, полученные численно для двух однонаправленно связанных осцилляторов Ресслера (23), находящихся в режиме сосуществования перемежаемости игольного ушка и перемежаемости кольца, приведены на рис. 2 для трех различных наборов значений параметра связи  $\varepsilon$  и временного масштаба  $s$ , на котором осуществляется наблюдение. Поскольку механизмы, приводящие к перемежаемости кольца и перемежаемости игольного ушка, различаются, то, соответственно, можно разделить проскоки фазы, относящиеся к одному и другому типам перемежающегося поведения, после

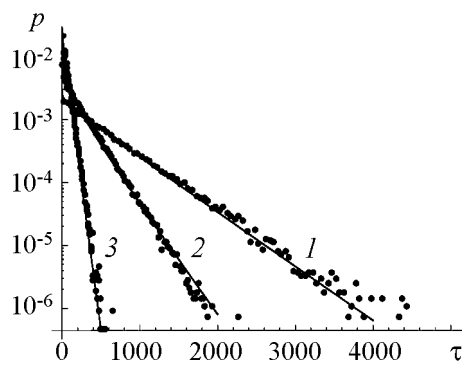


Рис. 2. Распределения длительностей ламинарных фаз для режима сосуществования перемежаемости игольного ушка и перемежаемости кольца для двух систем Ресслера (23) и аналитические зависимости (17), соответствующие этим распределениям (сплошные линии). Кривая 1 –  $\varepsilon = 0.038$ ,  $s = 4.980$ ,  $T_r = 540.5$ ,  $T_e = 17921.1$ ; кривая 2 –  $\varepsilon = 0.036$ ,  $s = 4.965$ ,  $T_r = 322.6$ ,  $T_e = 1666.7$ ; кривая 3 –  $\varepsilon = 0.036$ ,  $s = 4.870$ ,  $T_r = 50.0$ ,  $T_e = 1666.7$

Можно видеть, что полученное распределение длительностей ламинарных фаз очень хорошо согласуется с теоретической кривой (17). Точно такое же хорошее соответствие между теоретическими и численно полученными данными наблюдается и для других значений параметра связи и масштаба наблюдения (см. рис. 2, кривые 2, 3 и соответствующие им точки).

чего можно оценить значения  $T_r$  и  $T_e$ , входящие в теоретические соотношения (17), что позволяет сопоставить численно полученные данные с теоретическими предсказаниями. Для значения параметра связи  $\varepsilon = 0.038$  и временного масштаба  $s = 4.980$  значения средней длительности ламинарных фаз перемежаемости кольца и перемежаемости игольного ушка могут быть оценены как  $T_r = 540.5$  и  $T_e = 17921.1$ , соответственно. Теоретическая плотность распределения длительностей ламинарных фаз  $p(\tau)$ , соответствующая значениям  $\varepsilon = 0.038$  и  $s = 4.980$ , также показана на рис. 2 сплошной линией (кривая 1).

### Заключение

Таким образом, можно считать установленным, что ниже границы фазовой синхронизации, при значении параметра связи между осцилляторами, соответствующем перемежаемости игольного ушка, могут быть также выделены временные масштабы, на которых, помимо перемежаемости игольного ушка будет наблюдаться перемежающееся поведение типа кольца. Иными словами, при определенных значениях параметра связи и на определенных временных масштабах оба процесса перемежаемости будут наблюдаться одновременно.

*Работа выполнена при поддержке ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 годы, Президентской программы поддержки ведущих научных школ (проект НШ-3407.2010.2), Фонда некоммерческих программ «Династия».*

### Библиографический список

1. Dubois M., Rubio M., and Bergé P. Experimental evidence of intermitencies associated with a subharmonic bifurcation // Phys. Rev. Lett. 1983. Vol. 51. P. 1446.
2. Boccaletti S. and Valladares D.L. Characterization of intermittent lag synchronization // Phys. Rev. E. 2000. Vol. 62, № 5. P. 7497.
3. Boccaletti S., Kurths J., Osipov G.V., Valladares D.L., and Zhou C.S. The synchronization of chaotic systems // Physics Reports. 2002. Vol. 366. P. 1.

4. *Hramov A.E. and Koronovskii A.A.* Intermittent generalized synchronization in unidirectionally coupled chaotic oscillators // *Europhysics Lett.* 2005. Vol. 70, № 2. P. 169.
5. *Hramov A.E., Koronovskii A.A., and Levin Yu.I.* Synchronization of chaotic oscillator time scales // *JETP.* 2005. Vol. 127, № 4. P. 886.
6. *Bergé P., Pomeau Y., and Vidal Ch.* *L'ordre dans le chaos.* Hermann, Paris, 1988.
7. *Platt N., Spiegel E.A., and Tresser C.* On-off intermittency: a mechanism for bursting // *Phys. Rev. Lett.* 1993. Vol. 70, № 3. P. 279.
8. *Pikovsky A.S., Osipov G.V., Rosenblum M.G., Zaks M., and Kurths J.* Attractor–repeller collision and eyelet intermittency at the transition to phase synchronization // *Phys. Rev. Lett.* 1997. Vol. 79, № 1. P. 47.
9. *Hramov A.E., Koronovskii A.A., Kurovskaya M.K., and Boccaletti S.* Ring intermittency in coupled chaotic oscillators at the boundary of phase synchronization // *Phys. Rev. Lett.* 2006. Vol. 97. 114101.
10. *Rosa E., Ott E., and Hess M.H.* Transition to phase synchronization of chaos // *Phys. Rev. Lett.* 1998. Vol. 80, № 8. P. 1642.
11. *Lee K.J., Kwak Y., and Lim T.K.* Phase jumps near a phase synchronization transition in systems of two coupled chaotic oscillators // *Phys. Rev. Lett.* 1998. Vol. 81, № 2. P. 321.
12. *Grebogi C., Ott E., and Yorke J.A.* Fractal basin boundaries, long lived chaotic transients, and unstable–unstable pair bifurcation // *Phys. Rev. Lett.* 1983. Vol. 50, № 13. P. 935.
13. *Короновский А.А., Куровская М.К., Москаленко О.И., Храмов А.Е.* Перемежаемость типа I в присутствии шума и перемежаемость игольного ушка // *Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика.* 2010. Т. 18, № 1. С. 24.
14. *Boccaletti S., Allaria E., Meucci R., and Arecchi F.T.* Experimental characterization of the transition to phase synchronization of chaotic  $CO_2$  laser systems // *Phys. Rev. Lett.* 2002. Vol. 89, № 19. 194101.
15. *Hramov A.E. and Koronovskii A.A.* An approach to chaotic synchronization // *Chaos.* 2004. Vol. 14, № 3. P. 603.
16. *Hramov A.E. and Koronovskii A.A.* Time scale synchronization of chaotic oscillators // *Physica D.* 2005. Vol. 206, № 3–4. P. 252.
17. *Hramov A.E. and Koronovskii A.A.* Generalized synchronization: a modified system approach // *Phys. Rev. E.* 2005. Vol. 71, № 6. 067201.
18. *Hramov A.E., Koronovskii A.A., and Moskalenko O.I.* Generalized synchronization onset // *Europhysics Letters.* 2005. Vol. 72, № 6. P. 901.
19. *Журавлев М.О., Куровская М.К., Москаленко О.И.* Метод выделения ламинарных и турбулентных фаз в перемежающихся временных реализациях систем, находящихся вблизи границы фазовой синхронизации // *Письма в ЖТФ.* 2010. Т. 36, № 10. С. 31.
20. *Hramov A.E., Koronovskii A.A., and Kurovskaya M.K.* Two types of phase synchronization destruction // *Phys. Rev. E.* 2007. Vol. 75, № 3, 036205.

## INTERMITTENCY NEAR PHASE SYNCHRONIZATION BOUNDARY AT DIFFERENT TIME SCALES

*M.O. Zhuravlev, A.A. Koronovskii, O.I. Moskalenko, A.E. Hramov*

In this paper the results of the study of the intermittent behavior taking place near the phase synchronization boundary on the different time scales of the observation are given. It has been shown that below the phase synchronization boundary, in the area of eyelet intermittency there are time scales where the ring intermittency is also observed. In other words, for the certain values of the coupling strength and time scale of observation both types of the intermittent behavior take place simultaneously. In this paper the theory of this type of the intermittent behavior is developed.

*Keywords:* Intermittency, phase synchronization, chaotic oscillators, time scale, dynamical system.



*Журавлев Максим Олегович* – родился в 1988 году в Бресте, учится в Саратовском Государственном Университете им. Н.Г. Чернышевского. Параллельно с обучением работает лаборантом исследователем в Лаборатории №5 ОФНС НИИ ЕН СГУ.

410012 Саратов, ул. Астраханская, 83  
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского  
E-mail: pifos@bk.ru



*Москаленко Ольга Игоревна* – родилась в Саратове (1984). Окончила факультет нелинейных процессов Саратовского госуниверситета (2006), кандидат физико-математических наук (2008). Доцент кафедры нелинейной физики СГУ, старший научный сотрудник лаборатории физики нелинейных явлений отделения физики нелинейных систем НИИ Естественных наук СГУ. Область научных интересов – исследование классической и хаотической синхронизации в нелинейных системах; применение непрерывного вейвлет- и фурье-анализа к проблеме хаотической синхронизации в системах с малым числом степеней свободы и пространственно-распределенных средах; изучение обобщенной синхронизации в системах с однонаправленной и взаимной связью и ее возможных приложений; влияние шума на установление синхронных режимов; применение хаотической синхронизации для скрытой передачи информации; исследование кооперативных явлений в сетях со сложной топологией; анализ хаотической синхронизации в сложных сетях. Автор более 20 статей в центральных реферируемых отечественных и зарубежных научных журналах.

410012 Саратов, ул. Астраханская, 83  
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского  
E-mail: moskalenko@nonlin.sgu.ru