

УДК 517.9

УНИВЕРСАЛЬНАЯ ЗАКОНОМЕРНОСТЬ СИНХРОНИЗАЦИИ ОСНОВНЫХ СПЕКТРАЛЬНЫХ КОМПОНЕНТ ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ

© 2011 г. Д. И. Данилов, А. А. Короновский

ГОУ ВПО Саратовский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского

E-mail: alkor@cas.ssu.runnet.ru; alkor@nonlin.sgu.ru

Исследована динамика связанных хаотических осцилляторов вблизи границы фазовой хаотической синхронизации; найдена универсальная закономерность изменения дисперсии разности фаз основных спектральных компонент, рассчитанной при помощи преобразования Фурье, от длины анализируемого временного интервала. Выявленная закономерность описывает поведение систем различных классов при любых значениях управляющего параметра, принадлежащих исследуемой области.

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время известно несколько различных типов синхронного поведения взаимодействующих хаотических систем, при этом одним из вызывающих наибольший интерес является вопрос об их взаимосвязи друг с другом [1, 2]. Разработаны несколько подходов анализа разных типов хаотической синхронизации с единых позиций, один из которых – синхронизация спектральных компонент фурье-спектров. В [3, 4] показано, что различные типы хаотической синхронизации (фазовая синхронизация, синхронизация с запаздыванием, полная синхронизация) – это частные проявления синхронизации спектральных компонент. В частности, фазовая синхронизация при таком подходе означает синхронизацию основных спектральных компонент фурье-спектров взаимодействующих систем, что выражается в независимости от начальных условий разности фаз основных спектральных компонент, рассчитанных при помощи преобразования Фурье.

Хаотическая синхронизация, с точки зрения спектральных компонент, изучена достаточно хорошо, однако исследование динамики в области параметров, предшествующей установлению синхронного режима, до настоящего времени не проводилось. Известно, что в хаотических системах в некотором узком диапазоне параметра связи, непосредственно прилегающем к области синхронной динамики, наблюдается явление перемежаемости игольного ушка [5, 6]. В этом случае можно ожидать, что распределение разности фаз основных спектральных компонент будет отличаться от δ -функции, соответствующей синхронному поведению. Представляет интерес вопрос о том, какой вид имеют эти распределения, а также каким образом они изменяются в зависимости от параметра надкритичности. При этом следует учиты-

вать, что формально преобразование Фурье рассчитывается по бесконечному интервалу времени, однако при численном моделировании, как и при проведении экспериментальных исследований, мы вынуждены ограничиваться анализом некоторого конечного отрезка временной реализации. Соответственно возникает вопрос о том, каким образом результат расчетов зависит от выбираемой длины временной реализации.

Исследованию этих вопросов и посвящена данная работа. В первом разделе рассмотрена динамика хаотических потоковых систем, находящихся как в синхронном, так и в асинхронном режимах. В качестве исследуемой системы выбраны два однонаправленно связанных осциллятора Ресслера. Во втором разделе изучена динамика дискретного отображения (отображение окружности) вблизи седло-узловой бифуркации при наличии шума, которое можно рассматривать как модельную систему, описывающую процессы при установлении синхронного режима [7]. Также проведено сопоставление полученных результатов с результатами раздела 1.

1. СИНХРОНИЗАЦИЯ СПЕКТРАЛЬНЫХ КОМПОНЕНТ В ДВУХ ОДНОНАПРАВЛЕННО СВЯЗАННЫХ СИСТЕМАХ РЕССЛЕРА

Начнем рассмотрение с системы, состоящей из двух однонаправленно связанных осцилляторов Ресслера:

$$\begin{aligned} \dot{x}_d &= -\omega_d y_d - z_d, \\ \dot{y}_d &= \omega_d x_d + a y_d, \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \dot{z}_d &= p + z_d (x_d - c), \\ \dot{x}_r &= -\omega_r y_r - z_r + \alpha (x_d - x_r), \\ \dot{y}_r &= \omega_r x_r + a y_r, \\ \dot{z}_r &= p + z_r (x_r - c). \end{aligned} \quad (2)$$

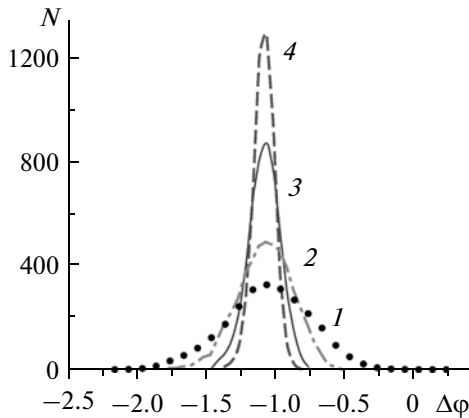


Рис. 1. Распределения разности фаз основных спектральных компонент систем Ресслера при $\varepsilon = 0.043$, введенных как угол поворота на фазовой плоскости (1), а также рассчитанных при помощи преобразования Фурье для разных значений анализируемого интервала времени: $T = 100$ (2), $T = 600$ (3), $T = 1600$ (4).

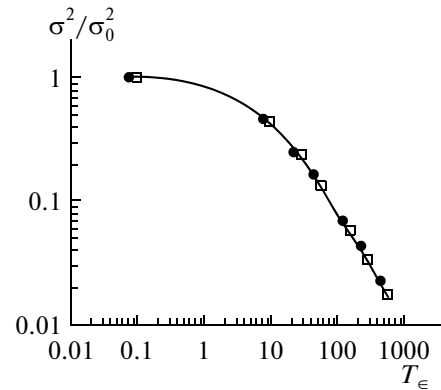


Рис. 2. Зависимости нормированной величины дисперсии распределений разности фаз систем Ресслера от нормированной длины временного интервала при $\varepsilon = 0.04$ (точки) и при $\varepsilon = 0.043$ (квадраты).

В уравнениях (1), (2) индекс d соответствует ведущей системе, а индекс r — ведомой. Параметры систем выбраны следующим образом: $a = 0.15$, $p = 0.2$, $c = 10.0$. Параметры $\omega_d = 0.93$ и $\omega_r = 0.95$ задают собственную частоту ведущей и ведомой систем соответственно, а ε — параметр, отвечающий за связь между системами. Основной спектральной компоненте ведущей системы в этом случае соответствует значение частоты $f_d = 0.148$, основная частота ведомой системы в автономном режиме $f_r = 0.151$. Распределения значений разности фаз ведущей и ведомой систем на частоте f_d , рассчитанных при помощи преобразования Фурье, описываются соотношением Гаусса. На рис. 1 приведены распределения, полученные по временным интервалам разной длины T для значения параметра связи $\varepsilon = 0.043$. Для выбранных параметров системы режим фазовой синхронизации наблюдается при превышении критического значения параметра силы связи $\varepsilon_{PS} \approx 0.041$, таким образом, значение $\varepsilon = 0.043$ соответствует синхронному режиму. Видно, что с увеличением длины временных интервалов T , на которых осуществляется преобразование Фурье, дисперсия этих распределений уменьшается и стремится к нулю при стремлении T к бесконечности. Также на рис. 1 показано точками распределение разности фаз, введенных как угол поворота на фазовой плоскости [2]. Такой способ введения фазы справедлив, так как при данных параметрах системы обладают фазово-когерентным аттрактором.

При $\varepsilon < \varepsilon_{PS}$ распределения имеют аналогичную форму, их дисперсия также уменьшается с увеличением интервала, по которому рассчитывается преобразование Фурье. Оценим, как именно зависит дисперсия от длины анализируемого

интервала, а также как соотносятся друг с другом такие зависимости для различных значений параметра связи ε , находящихся в диапазоне значений, соответствующих режиму перемежаемости игольного ушка.

Аналитическое решение такой задачи для системы связанных осцилляторов Ресслера невозможно. В то же время известно, что в ряде случаев хаотическая динамика может быть рассмотрена как случайные возмущения регулярного поведения [8, 9]. В [5, 6] показано, что перемежаемость игольного ушка и перемежаемость типа I с шумом — это один и тот же тип поведения. Для подобного описания можно ввести следующую перенормировку переменных, аналогичную вводимой в [7]:

$$q = \frac{\Delta\varphi}{\sqrt{|\varepsilon|}}, \quad \tau = t\sqrt{|\varepsilon|}, \quad (3)$$

где $\Delta\varphi$ — разность фаз взаимодействующих осцилляторов, t — время, $\varepsilon = \varepsilon - \varepsilon_c$ — параметр надкритичности, $\varepsilon_c = 0.0345$ — точка седло-узловой бифуркации рассматриваемой системы. Она соответствует точке установления режима фазовой синхронизации в случае, если можно было бы “выключить” собственный шум, присущий хаотической динамике систем Ресслера [7].

Можно ожидать, что после введенной перенормировки (3) зависимости дисперсии σ^2 от длины нормированного анализируемого временного интервала $T_\varepsilon = T\sqrt{|\varepsilon|}$ для различных значений параметра ε будут близки. Для удобства отнормируем дисперсию σ^2 на σ_0^2 , где σ_0^2 — величина дисперсии распределения разности фаз, введенных как угол поворота на фазовой плоскости. На рис. 2 приведены полученные зависимости; видно, что

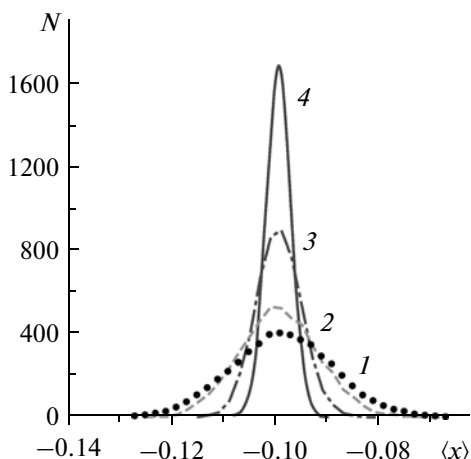


Рис. 3. Распределения усредненной величины x_n отображения окружности при значении управляющего параметра $\varepsilon = 0.1$ для $K = 1$ (1), $K = 100$ (2), $K = 500$ (3), $K = 2000$ (4).

полученные кривые, как и ожидалось, практически совпадают. Таким образом, получена некая универсальная кривая, описывающая уменьшение дисперсии разности фаз от длины временного интервала при различных значениях параметра связи.

2. ПЕРЕМЕЖАЕМОСТЬ ТИПА I С ШУМОМ В ОТОБРАЖЕНИИ ОКРУЖНОСТИ

Как отмечено выше, в [5, 6] показано, что перемежаемость игольного ушка и перемежаемость типа I с шумом – это один и тот же тип поведения, поэтому для подтверждения общности полученных результатов рассмотрим динамику отображения окружности с шумом:

$$x_{n+1} = x_n + 2\Omega(1 - \cos x_n) - \varepsilon + \xi_n, \text{ mod } 2\pi, \quad (4)$$

где ε – управляющий параметр, $\Omega = 0.1$, ξ_n – δ -коррелированный гауссов белый шум. Аналог разности фаз систем Ресслера (1)–(2) – переменная x_n , а аналог преобразования Фурье в этом случае – усреднение по некоторому интервалу дискретного времени K :

$$\langle x \rangle = \frac{1}{K} \sum_{i=1}^K x_i. \quad (5)$$

Неусредненное значение x_n соответствует разности фаз систем Ресслера, введенных как угол поворота на фазовой плоскости.

На рис. 3 представлены распределения величины x_n отображения окружности при $\varepsilon = 0.1$ для разной длины K интервала дискретного времени, по которому проводится усреднение, – аналоги распределений, приведенных на рис. 1 для систем Ресслера. Видно, что они также имеют вид распределений Гаусса, их дисперсия также уменьша-

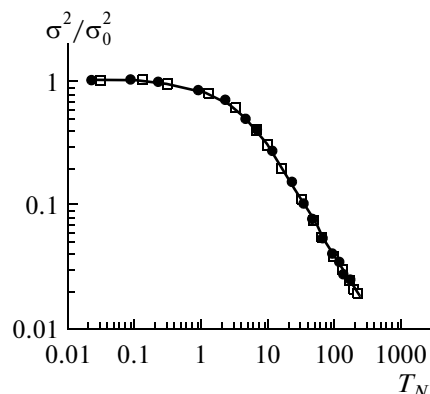


Рис. 4. Зависимости нормированной величины дисперсии распределений величины x_n отображения окружности от интервала дискретного времени T_N при значении управляющего параметра $\varepsilon = 0.05$ (точки) и $\varepsilon = 0.1$ (квадраты).

ется с увеличением интервала дискретного времени. По аналогии с [7] введем перенормировку

$$z = \frac{x_n}{\sqrt{|\varepsilon|}}, \quad \tau = t\sqrt{|\varepsilon|}, \quad D^* = D|\varepsilon|^{-3/2}, \quad (5)$$

где t – время, D – интенсивность шума (в данном случае параметр надкритичности равен ε , так как точка седло-узловой бифуркации находится в нуле [7]). Рассчитав зависимости дисперсии σ^2 , нормированной на σ_0^2 , где σ_0^2 – значение дисперсии распределения, посчитанного для $K = 1$, от нормированного интервала дискретного времени $T_N = K\sqrt{|\varepsilon|}$, получим, что для различных значений ε они совпадают и имеют такой же вид, как и для систем Ресслера (рис. 4).

Важным представляется сопоставление полученных результатов для отображения окружности с шумом с результатами первого раздела для систем Ресслера. Однако это осложняется тем, что системы, с которыми мы имеем дело, принадлежат к разным классам: осцилляторы Ресслера принадлежат к классу систем с потоковым временем, тогда как отображение окружности является системой с дискретным временем. В то же время известно, что потоковые системы можно привести к отображениям при помощи сечения Пуанкаре и соответственно свойства потоковых систем связаны со свойствами отображений [10]. При осуществлении перехода от потоковой системы к отображению с помощью процедуры сечения Пуанкаре интервал времени между пересечением фазовой траекторией секущей поверхности в среднем обратно пропорционален основной частоте фурье-спектра, что соответствует одной единице времени в динамике отображения. При этом также следует учитывать, что параметры

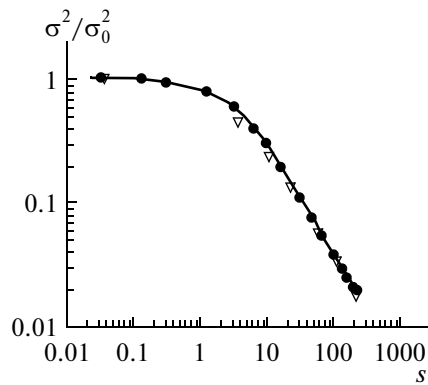


Рис. 5. Зависимость нормированной величины дисперсии от нормированной длины временного интервала. Линия с точками соответствует отображению окружности при значении управляющего параметра $\varepsilon = 0.1$, треугольники – системам Ресслера при значении параметра связи $\varepsilon = 0.043$.

надкритичности в потоковой системе и отображении имеют разные характерные масштабы. Для корректного сопоставления результатов следует провести еще одну перенормировку времени:

$$s = \alpha_i \tau, \quad (6)$$

где $i = 1, 2$, $\alpha_1 = 0.4$, $\alpha_2 = 1.0$, индекс 1 соответствует системам Ресслера, индекс 2 – отображению окружности. Коэффициенты α_i были найдены эмпирически. На рис. 5 представлены полученные зависимости после перенормировки (6). Видно, что они ложатся на определенную кривую, универсальную как для систем Ресслера, так и для отображения окружности при любом значении управляющего параметра, принадлежащем изучаемой области.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотрено явление синхронизации спектральных компонент для хаотических систем, находящихся в режимах перемежаемости игольного ушка и фазовой синхронизации. Для выбранной модельной системы однонаправленно связанных хаотических осцилляторов Ресслера получены распределения разности фаз, рассчитанных при помощи преобразования Фурье, а также введен-

ных как угол поворота на фазовой плоскости. Обнаружена универсальная зависимость дисперсии таких распределений от длины анализируемого интервала времени T , описывающая динамику системы при любом значении параметра связи ε , принадлежащем исследуемой области. Можно ожидать, что зависимость такого типа будет описывать динамику широкого класса хаотических систем, находящихся вблизи границы фазовой синхронизации. Корректность полученных результатов подтверждается аналогичными результатами для отображения окружности с шумом, которые совпадают с аналитическими оценками. Полученные результаты можно также рассматривать как дополнительное подтверждение единства перемежаемости игольного ушка и перемежаемости типа I с шумом.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, Президентской программы поддержки ведущих научных школ РФ (проект НШ-3407.2010.2), аналитической ведомственной целевой программы “Развитие научного потенциала высшей школы”, а также ФНП “Династия”.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Boccaletti S., Kurths J., Osipov G.V. et al.* // Phys. Rep. V. 366. № 1–2. 2002. P. 1.
2. *Пиковский А.С., Розенблюм М.Г., Куртс Ю.* Синхронизация. Фундаментальное нелинейное явление. М.: Техносфера, 2003.
3. *Hramov A.E., Koronovskii A.A., Kurovskaya M.K., Moskalenko O.I.* // Phys. Rev. E. 2005. V. 71. № 5. 056204.
4. *Москаленко О.И.* // ЖТФ. 2010. Т. 80. № 8. С. 1.
5. *Коронровский А.А., Куровская М.К., Москаленко О.И., Храмов А.Е.* // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2010. Т. 18. № 1. С. 24.
6. *Hramov A.E., Koronovskii A.A., Kurovskaya M.K., Moskalenko O.I.* // Phys. Lett. A. 2011. V. 375. P. 1646.
7. *Hramov A.E., Koronovskii A.A., Kurovskaya M.K.* // Phys. Rev. E. 2008. V. 78. № 3. 036212.
8. *Kye W.-H., Kim C.-M.* // Phys. Rev. E. 2000. V. 62. № 5. P. 6304.
9. *Pikovsky A.S., Rosenblum M.G., Osipov G.V., Kurths J.* // Physica D. 1997. V. 104. № 4. P. 219.
10. *Коронровский А.А., Храмова А.Е., Стародубов А.В.* // Письма в ЖТФ. 2006. Т. 32. № 19. С. 86.