

**ДИНАМИЧЕСКИЙ ХАОС
В РАДИОФИЗИКЕ И ЭЛЕКТРОНИКЕ**

УДК 519.7

**ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ ШУМА
НА ОБОБЩЕННУЮ ХАОТИЧЕСКУЮ СИНХРОНИЗАЦИЮ
В ДИССИПАТИВНО СВЯЗАННЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ:
УСТОЙЧИВОСТЬ СИНХРОННОГО РЕЖИМА ПО ОТНОШЕНИЮ
К ВНЕШНИМ ШУМАМ И ВОЗМОЖНЫЕ
ПРАКТИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ**

© 2010 г. **О. И. Москаленко, А. А. Овчинников**

Поступила в редакцию 14.08.2009 г.

Исследовано влияние шума на обобщенную синхронизацию в диссипативно связанных хаотических системах. Показано, что шум практически не оказывает влияния на порог возникновения синхронного режима. Причины возникновения выявленной особенности объяснены при помощи метода модифицированной системы и подтверждены результатами численного моделирования и экспериментальных исследований. Найдены практические приложения выявленной особенности. Предложен способ скрытой передачи информации по каналам связи с высоким уровнем шумов.

ВВЕДЕНИЕ

Синхронизация хаотических колебаний представляет собой одно из фундаментальных явлений современной теории нелинейных колебаний, привлекающих пристальное внимание исследователей [1, 2]. Интерес к этому феномену связан как с большим фундаментальным значением его исследования [1], так и с широким кругом практических приложений, например, при скрытой передаче информации [3–9], в биологических, химических, физических задачах [10–13], при управлении хаосом, в том числе в системах СВЧ-электроники [14–17].

В настоящее время выявлено несколько типов синхронного поведения однонаправлено и взаимно связанных динамических систем, например, фазовая синхронизация [18], обобщенная синхронизация [19], синхронизация с запаздыванием [20], полная синхронизация [21], синхронизация, индуцированная шумом [22], синхронизация временных масштабов [23] и др., каждый из которых обладает специфическими особенностями.

Одним из наиболее важных вопросов, связанных с изучением явления хаотической синхронизации, является влияние шума на установление синхронных режимов [24–33]. Известно, что шум может оказывать как конструктивное, так и деструктивное воздействие на поведение систем. В частности, в случае полной синхронизации шум может привести к потере синхронного режима из-за локальной неустойчивости синхронного многообразия, сопровождающейся возникновением on-off-перемежаемости [34, 35]. В то же вре-

мя общий шум способен синхронизовать две не взаимодействующие, но идентичные системы (стартующие с различных начальных условий). В этом случае диагностируется режим индуцированной шумом синхронизации [22, 25, 31, 36, 37]. В случае фазовой синхронизации внешний шум может привести к сдвигу пороговых значений параметра связи, соответствующих установлению синхронного режима [38]. Вместе с тем шум может играть и конструктивную роль при фазовой синхронизации, усиливая синхронный режим ниже порога его возникновения [28].

Влияние шума на обобщенную синхронизацию в настоящее время исследовано слабо. В качестве исключения можно отметить работу [33], где изучен вопрос о влиянии шума на обобщенную синхронизацию в совершенно разных однонаправленно связанных динамических системах. Показано, что в этом случае роль шума является “системозависимой”, т.е. шум способен как усилить/вызвать, так и, наоборот, разрушить режим обобщенной синхронизации.

В данной работе впервые проводится теоретическое и экспериментальное исследование влияния шума на возникновение обобщенной синхронизации в диссипативно связанных хаотических системах со слегка расстроенными параметрами. Как будет показано ниже, шум практически не оказывает влияния на порог возникновения режима обобщенной синхронизации в таких системах, а следовательно, режим обобщенной синхронизации обладает устойчивостью к шумам. Выявленная особенность может найти применение в раз-

личных областях науки и техники, например, при скрытой передаче информации по каналам связи, где уровень шума является достаточно высоким [39, 40].

1. РЕЖИМ ОБОБЩЕННОЙ СИНХРОНИЗАЦИИ ХАОТИЧЕСКИХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ

Обобщенная синхронизация вводится в рассмотрение для системы двух однонаправленно связанных хаотических осцилляторов, ведущего $\bar{\mathbf{x}}(t)$ и ведомого $\bar{\mathbf{u}}(t)$, и означает, что после завершения переходного процесса устанавливается функциональная зависимость между их состояниями, т.е. $\bar{\mathbf{u}}(t) = \bar{\mathbf{F}}[\bar{\mathbf{x}}(t)]$ [19], вид которой $\bar{\mathbf{F}}[\cdot]$ может быть достаточно сложным, а процедура ее нахождения весьма нетривиальной [41].

В литературе предложено несколько методов для диагностирования режима обобщенной синхронизации: метод ближайших соседей [19, 42], метод расчета условных ляпуновских экспонент [43, 44] и часто используемый и относительно легко осуществимый на практике метод вспомогательной системы [45].

Суть метода вспомогательной системы сводится к следующему: наряду с ведомой системой $\bar{\mathbf{u}}(t)$ рассматривается идентичная ей вспомогательная система $\bar{\mathbf{v}}(t)$. Начальные условия для вспомогательной системы $\bar{\mathbf{v}}(t_0)$ выбираются отличными от начального состояния ведомой системы $\bar{\mathbf{u}}(t_0)$, однако лежащими в бассейне притяжения того же аттрактора. В случае отсутствия режима обобщенной синхронизации между взаимодействующими системами вектора состояния ведомой $\bar{\mathbf{u}}(t)$ и вспомогательной $\bar{\mathbf{v}}(t)$ систем принадлежат одному и тому же хаотическому аттрактору, но являются различными. В режиме обобщенной синхронизации, в силу выполнения соотношений

$$\bar{\mathbf{u}}(t) = \bar{\mathbf{F}}[\bar{\mathbf{x}}(t)],$$

и, соответственно,

$$\bar{\mathbf{v}}(t) = \bar{\mathbf{F}}[\bar{\mathbf{x}}(t)],$$

после завершения переходного процесса состояния ведомой и вспомогательной систем должны стать идентичными

$$\bar{\mathbf{u}}(t) \equiv \bar{\mathbf{v}}(t),$$

что является критерием наличия обобщенной синхронизации между ведущим и ведомым осцилляторами.

Анализ режима обобщенной синхронизации может быть проведен также с помощью вычисления условных ляпуновских экспонент [43, 44]. Если размерности фазовых пространств ведущей

и ведомой систем соответственно равны N_d и N_r , то поведение однонаправленно связанных хаотических осцилляторов может быть охарактеризовано с помощью спектра ляпуновских показателей $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_{N_d+N_r}$. В силу независимости поведения ведущей системы от состояния ведомого осциллятора, спектр ляпуновских показателей может быть разделен на две части:

– ляпуновские показатели ведущей системы

$$\lambda_1^d \geq \dots \geq \lambda_{N_d}^d,$$

– условные ляпуновские показатели

$$\lambda_1^r \geq \dots \geq \lambda_{N_r}^r.$$

Критерием существования обобщенной синхронизации в однонаправленно связанных системах [41, 43] является отрицательность старшего условного ляпуновского показателя λ_1^r .

Известно, что режим обобщенной синхронизации может наблюдаться в системах с диссипативным и недиссипативным типом связи [41, 46]. Для систем с диссипативной связью (которые мы будем рассматривать далее) уравнения, описывающие динамику взаимодействующих систем, могут быть записаны в виде [46]:

$$\begin{aligned} \dot{\bar{\mathbf{x}}}(t) &= \mathbf{G}(\bar{\mathbf{x}}(t), \bar{\mathbf{g}}_d), \\ \dot{\bar{\mathbf{u}}}(t) &= \mathbf{H}(\bar{\mathbf{u}}(t), \bar{\mathbf{g}}_r) + \varepsilon \mathbf{A}(\bar{\mathbf{x}}(t) - \bar{\mathbf{u}}(t)), \end{aligned} \quad (1)$$

где $\bar{\mathbf{x}}(t)$ и $\bar{\mathbf{u}}(t)$ – векторы состояния ведущей и ведомой систем соответственно, \mathbf{G} и \mathbf{H} определяют векторные поля взаимодействующих систем, $\bar{\mathbf{g}}_d$ и $\bar{\mathbf{g}}_r$ – векторы управляющих параметров, $\mathbf{A} = \{\delta_{ij}\}$ – матрица связи, $\delta_{ii} = 0$ или $\delta_{ii} = 1$, $\delta_{ij} = 0$ ($i \neq j$), ε – параметр связи.

Механизмы возникновения режима обобщенной синхронизации могут быть выявлены при помощи метода модифицированной системы, предложенного в наших работах [46, 47]. Согласно этому подходу, ведомая система $\bar{\mathbf{u}}(t)$ может быть рассмотрена как модифицированная система

$$\dot{\bar{\mathbf{u}}}_m(t) = \mathbf{H}'(\bar{\mathbf{u}}_m(t), \bar{\mathbf{g}}_r, \varepsilon), \quad (2)$$

под внешним воздействием $\varepsilon(\mathbf{A}\bar{\mathbf{x}}(t) + D\xi(t))$,

$$\dot{\bar{\mathbf{u}}}_m(t) = \mathbf{H}'(\bar{\mathbf{u}}_m(t), \bar{\mathbf{g}}_r, \varepsilon) + \varepsilon(\mathbf{A}\bar{\mathbf{x}}(t) + D\xi(t)), \quad (3)$$

где $\mathbf{H}'(\bar{\mathbf{u}}(t)) = \mathbf{H}(\bar{\mathbf{u}}(t)) - \varepsilon \mathbf{A}\bar{\mathbf{u}}(t)$.

Слагаемое $-\varepsilon \mathbf{A}\bar{\mathbf{u}}(t)$ вносит дополнительную диссипацию в модифицированную систему (2).

Режим обобщенной синхронизации, возникающий в системе (1), может быть рассмотрен как следствие двух взаимосвязанных процессов, протекающих одновременно: увеличения диссипации в модифицированной системе (2) и возраста-

ния амплитуды внешнего сигнала [46, 47]. Увеличение диссипации в модифицированной системе (2) приводит к упрощению ее поведения и переходу от хаотических колебаний к периодическим (или к стационарному состоянию). Внешнее воздействие, наоборот, стремится усложнить поведение модифицированной системы и навязать ей свою динамику. Как показано в [46, 47], возникновение режима обобщенной синхронизации возможно только тогда, когда собственная хаотическая динамика в ведомой системе оказывается подавленной за счет диссипации.

Таким образом, устойчивость режима обобщенной синхронизации определяется прежде всего свойствами модифицированной системы. Добавление внешнего шума $\mathbf{B}D\xi(t)$ (\mathbf{B} – матрица связи, аналогичная \mathbf{A}) в уравнения системы (1) не должно приводить к существенному изменению характеристик модифицированной системы. Если аддитивный шум не меняет существенно характеристики модифицированной системы (2), то он и не должен сильно влиять на порог возникновения режима обобщенной синхронизации в (1).

Действительно, как упоминалось выше, анализ режима обобщенной синхронизации возможен путем расчета условных ляпуновских экспонент. Понятно, что ведомая и вспомогательная системы могут быть рассмотрены как две идентичные системы, стартующие с близких начальных условий. Вычисление производной от разности их состояний

$$\bar{\Delta}(t) = \bar{\mathbf{v}}(t) - \bar{\mathbf{u}}(t),$$

при наличии ($D > 0$) и отсутствии шума ($D = 0$) в виду идентичности детерминированных и стохастических сигналов, воздействующих на каждую из систем, приводит к одному и тому же уравнению:

$$\dot{\bar{\Delta}}(t) = (\mathbf{J}\mathbf{H}(\bar{\mathbf{u}}(t)) - \varepsilon\mathbf{A})\bar{\Delta}(t) = \mathbf{J}\mathbf{H}'(\bar{\mathbf{u}}(t))\bar{\Delta}(t), \quad (4)$$

где \mathbf{J} – матрица Якоби. Так как уравнение (4) может быть рассмотрено как уравнение в вариациях при вычислении условных ляпуновских экспонент, можно сделать вывод, что старшие условные ляпуновские показатели λ_1^r , определяющие порог возникновения режима обобщенной синхронизации, будут вести себя схожим образом как в отсутствие, так и при наличии шума, пересекая порог $\lambda_1^r = 0$ при одних и тех же значениях ε , соответствующих установлению режима обобщенной синхронизации. Поэтому порог возникновения обобщенной синхронизации, как следует из (4), не должен зависеть от интенсивности шума, а сам тип синхронного поведения должен обладать значительной устойчивостью к шумам. Тем не менее следует обратить внимание на то, что вектор состояния ведомой системы $\bar{\mathbf{u}}(t)$ в (4) все-таки зави-

сит от случайного сигнала ξ , и, соответственно, шум большой интенсивности D может изменять свойства модифицированной системы, что в конечном итоге может приводить к изменению границы возникновения режима обобщенной синхронизации.

2. ВЛИЯНИЕ ШУМА НА УСТАНОВЛЕНИЕ РЕЖИМА ОБОБЩЕННОЙ СИНХРОНИЗАЦИИ В МОДЕЛЬНЫХ СИСТЕМАХ: ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Чтобы подтвердить справедливость теоретических рассуждений, изложенных в разделе 1, рассмотрим при помощи численного моделирования поведение некоторых динамических систем, способных демонстрировать режим обобщенной синхронизации, в случае, если на них воздействует дополнительный источник шума. В качестве примеров выберем:

- а) системы с дискретным временем – однонаправленно связанные логистические отображения,
- б) хаотические осцилляторы – однонаправленно связанные системы Ресслера.

А. Логистические отображения

В качестве первого примера рассмотрим поведение однонаправленно связанных логистических отображений [44] в случае, когда на ведомую систему дополнительно воздействует внешний источник шума:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= f(x_n, \lambda_x), \\ y_{n+1} &= f(y_n, \lambda_y) + \varepsilon(f(x_n, \lambda_x) + Df(\xi, \lambda_x) - f(y_n, \lambda_y)), \end{aligned} \quad (5)$$

где $f(x, \lambda) = \lambda x(1 - x)$, $\lambda_{x,y}$ – управляющие параметры ведущей и ведомой систем соответственно, величина ε характеризует интенсивность связи между осцилляторами, ξ – случайный процесс с равномерно распределенной плотностью вероятности на единичном интервале $[0; 1]$, D – интенсивность шума. Для диагностики режима обобщенной синхронизации в исследуемой системе (5), использовался метод вспомогательной системы.

Зависимость порога возникновения режима обобщенной синхронизации на плоскости управляющих параметров “интенсивность шума D – параметр связи ε ” при различных значениях управляющих параметров $\lambda_{x,y}$ приведена на рис. 1. Из рисунка видно, что порог возникновения режима обобщенной хаотической синхронизации в (5) практически не зависит от интенсивности шума в диапазоне значений $D \in [0; 0.1]$. Для объяснения такого поведения рассматриваемых систем

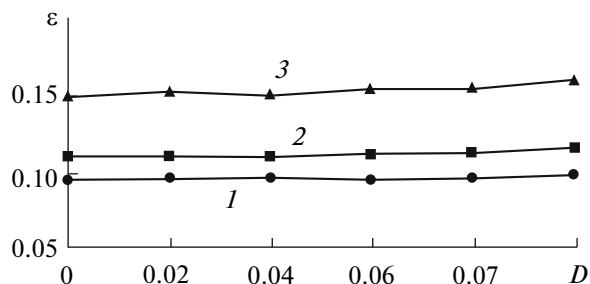


Рис. 1. Зависимость порога возникновения режима обобщенной хаотической синхронизации в двух однонаправленно связанных логистических отображениях от интенсивности шума при различных значениях управляющих параметров: $\lambda_x = 3.75, \lambda_y = 3.75$ (1), $\lambda_x = 3.75, \lambda_y = 3.79$ (2), $\lambda_x = 3.75, \lambda_y = 3.9$ (3).

следует обратить внимание на модифицированную систему

$$z_{n+1} = (1 - \varepsilon)f(z_n, \lambda_y) = az_n(1 - z_n), \quad (6)$$

где $a = \lambda_y(1 - \varepsilon)$. Бифуркационная диаграмма, характеризующая поведение модифицированной системы при изменении параметра ε , показана на рис. 2а. Видно, что для величины параметра связи, соответствующей порогу возникновения режима обобщенной синхронизации в системе (5), модифицированная система (6) демонстрирует периодические колебания. Внешнее шумовое воздействие практически не изменяет характеристики модифицированной системы и, соответ-

ственно, практически не влияет на порог возникновения режима обобщенной синхронизации. Бифуркационная диаграмма модифицированного логистического отображения при наличии шума интенсивности $D = 0.1$ представлена на рис. 2б. Уровень шума является достаточно высоким по сравнению с амплитудой сигнала, что можно отчетливо заметить по самому виду бифуркационной диаграммы. В то же время нетрудно увидеть, что в этом случае внешний шум не сдвигает точки бифуркаций, а только приводит к зашумлению режима, реализующегося в системе. Поэтому можно утверждать, что, несмотря на достаточно большую амплитуду, внешний шум практически не влияет на

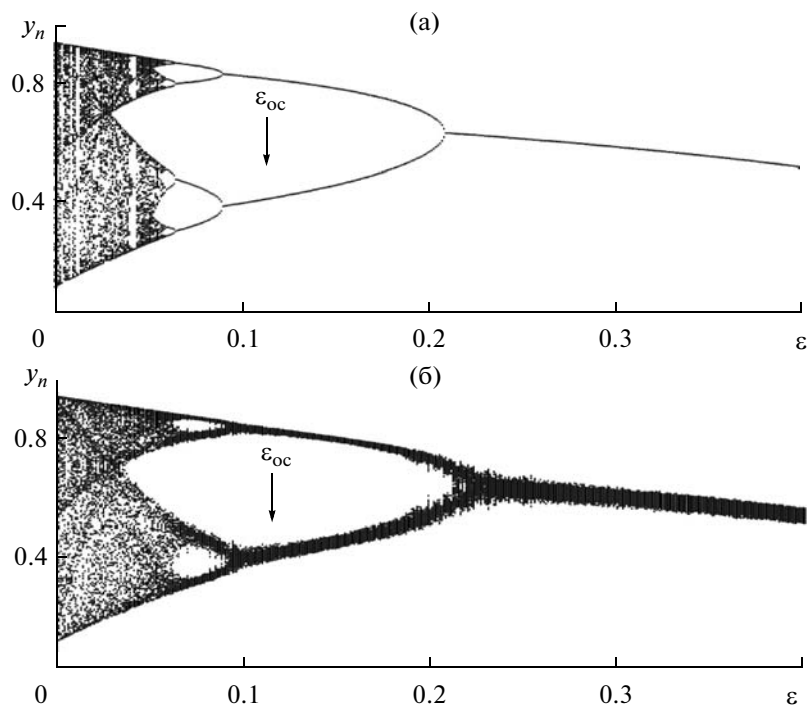


Рис. 2. Бифуркационная диаграмма модифицированного логистического отображения (6) в отсутствие (а) и при наличии (б) шума. Управляющий параметр $\lambda_y = 3.79$ в обоих случаях, интенсивность шума $D = 0.1$ (б). Значения параметра связи, соответствующие порогу возникновения режима обобщенной синхронизации, (ε_{0c}) показаны стрелками в обоих случаях.

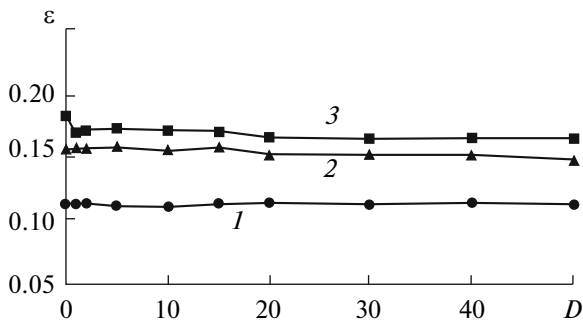


Рис. 3. Зависимость порога возникновения режима обобщенной хаотической синхронизации в двух одинаково связанных осцилляторах Ресслера (7) для различных значений параметра ω_x ведущей системы: $\omega_x = 0.99$ (1), 0.95 (2) и 0.91 (3).

установление режима обобщенной синхронизации в системах с дискретным временем.

Б. Системы Ресслера

В качестве второго примера рассмотрим две одинаково связанные системы Ресслера

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -\omega_x x_2 - x_3 + D_1 \xi, \\ \dot{x}_2 &= \omega_x x_1 + a x_2, \\ \dot{x}_3 &= p + x_3(x_1 - c), \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \dot{u}_1 &= -\omega_u u_2 - u_3 + \varepsilon(x_1 + D_2 \zeta - u_1), \\ \dot{u}_2 &= \omega_u u_1 + a u_2, \\ \dot{u}_3 &= p + u_3(u_1 - c), \end{aligned}$$

где

$$\bar{x}(t) = (x_1, x_2, x_3)^T \quad \text{и} \quad \bar{u}(t) = (u_1, u_2, u_3)^T$$

– векторы состояний ведущей и ведомой систем соответственно, $a = 0.15$, $p = 0.2$, $c = 10$, ω_x и $\omega_u = 0.95$ – управляющие параметры. Параметры $\omega_{x,u}$ определяют собственные частоты колебаний ведущей и ведомой систем, слагаемые $D_1 \xi$, $D_2 \zeta$ задают внешнее шумовое воздействие на взаимодействующие системы, ξ , ζ являются случайными гауссовскими процессами с нулевым средним и единичной дисперсией. Для интегрирования уравнений (7) использовался метод Рунге-Кутты четвертого порядка, адаптированный для стохастических дифференциальных уравнений [48], с шагом по времени $\Delta t = 0.001$, диагностика режима обобщенной хаотической синхронизации осуществлялась с помощью метода вспомогательной системы (см. разд. 1).

Предположим, что шум действует только на ведомую систему, т.е. $D_1 = 0$, $D_2 = D$. На рис. 3 приведена зависимость порога возникновения

режима обобщенной хаотической синхронизации от интенсивности шума для трех различных значений управляющего параметра ω_x при фиксированных значениях остальных управляющих параметров. Для наиболее полной картины значения ω_x были выбраны следующими: $\omega_x = 0.99$ – относительно большая величина частотной расстройки взаимодействующих хаотических осцилляторов, $\omega_x = 0.95$ – идентичные осцилляторы, $\omega_x = 0.91$ – малые частотные расстройки. Нетрудно заметить, что при любой величине управляющего параметра ω_x граница возникновения режима обобщенной хаотической синхронизации практически не зависит от интенсивности шума D , и даже для достаточно больших значений $D > 20$ режим обобщенной синхронизации возникает примерно при тех же значениях параметра связи ε , что и в случае без шума.

На рис. 4 приведены сигналы $s(t) = x_1(t) + D \xi(t)$, воздействующие на ведомую и вспомогательную системы в отсутствие и при наличии шума, а также фазовые портреты ведомой системы и плоскости (u_1, v_1) , характеризующие поведение ведомой и вспомогательной систем до и после порога возникновения режима обобщенной синхронизации. Рис. 4а–4д относятся к случаю отсутствия шума, в то время как рис. 4е–4к соответствуют наличию шума большой интенсивности $D = 40$, воздействующего на ведомую систему (в последнем случае внешний сигнал подобен стохастическому, ср. рис. 4а и рис. 4е). Из рисунков видно, что характеристики ведомой системы практически не меняются при изменении интенсивности шума (ср. рис. 4б, 4г и 4ж, 4и соответственно). В этом случае можно говорить, что для одинаково связанных систем Ресслера шум большой интенсивности практически не меняет свойств устойчивости модифицированной системы

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= -\omega_u z_2 - z_3 - \varepsilon z_1, \\ \dot{z}_2 &= \omega_u z_1 + a z_2, \\ \dot{z}_3 &= p + z_3(z_1 - c), \end{aligned} \quad (8)$$

где $\bar{z} = (z_1, z_2, z_3)^T$ – вектор ее состояния и, как следствие, ведомой системы. При указанных значениях управляющих параметров в модифицированной системе (8) реализуется устойчивый цикл периода один (см. также [47]).

Важно отметить, что слабая зависимость порогового значения параметра связи, при котором устанавливается режим обобщенной хаотической синхронизации, от интенсивности шума наблюдается и в случае, если дополнительный источник шума воздействует также и на первый осциллятор (т.е. при условии $D_1 \neq 0$). Значение этого параметра

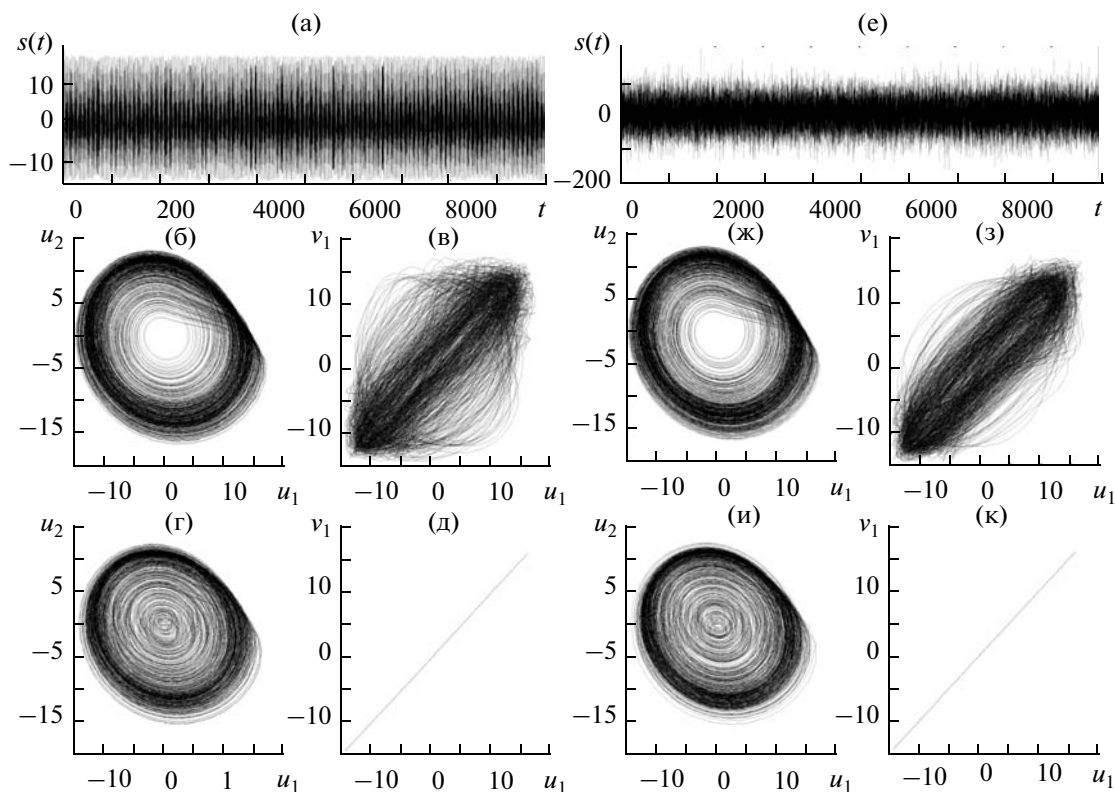


Рис. 4. Сигналы $s(t)$, воздействующие на ведомую и вспомогательную системы (а, е), фазовые портреты (б, г, ж, и) и плоскости (u_1, v_1) , характеризующие поведение ведомой и вспомогательной систем (в, д, з, к) соответственно до ($\epsilon = 0.05$) и после ($\epsilon = 0.114$) порога возникновения обобщенной синхронизации однонаправленно связанных систем Ресслера при $\omega_d = 0.99$; а–д – случай отсутствия шума $D = 0$; е–к – наличие шума интенсивности $D = 40$.

ра было выбрано равным $D_1 = \epsilon D$. Зависимости порогового значения параметра связи от интенсивности шума в этом случае приведены на рис. 5. Подобное поведение взаимодействующих систем в присутствии шума полностью определяется механизмами, описанными выше в этом разделе.

Таким образом, можно утверждать, что в рассмотренных случаях шум практически не влияет на порог возникновения режима обобщенной хаотической синхронизации, и, следовательно, можно говорить об устойчивости режима обобщенной хаотической синхронизации к внешнему шуму в системах с малым числом степеней свободы.

3. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ ШУМОВ НА ПОРОГ ВОЗНИКНОВЕНИЯ РЕЖИМА ОБОБЩЕННОЙ ХАОТИЧЕСКОЙ СИНХРОНИЗАЦИИ

Для подтверждения результатов теоретических предсказаний и численного моделирования, представленных в предыдущих разделах, было проведено также экспериментальное исследование влияния шума на устойчивость режима обобщенной синхронизации в связанных хаотических осцилляторах.

В качестве объектов экспериментальных исследований использовались простые радиотехнические генераторы, демонстрирующие хаотическую динамику, все параметры которых (включая интенсивность внешнего воздействия) могли легко контролироваться.

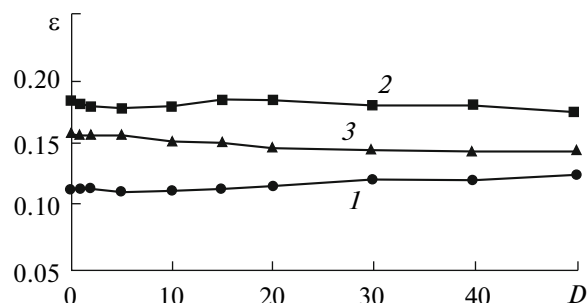


Рис. 5. Зависимость порога возникновения режима обобщенной хаотической синхронизации в двух однонаправленно связанных осцилляторах Ресслера (7), находящихся под воздействием общего источника шума, для различных значений параметра ω_χ ведущей системы $\omega_\chi = 0.99$ (1), 0.95 (2) и 0.91 (3).

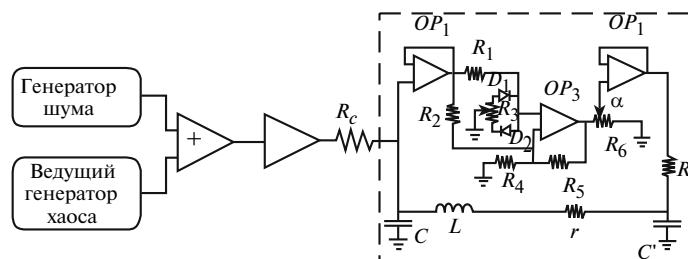


Рис. 6. Схема экспериментальной установки по изучению влияния шумов на устойчивость режима обобщенной хаотической синхронизации. Принципиальная схема генератора хаоса показана пунктирным прямоугольником. Номинальные значения элементов $C = 330 \text{ нФ}$, $C' = 150 \text{ нФ}$, $R = 630 \text{ Ом}$, $r = 56 \text{ Ом}$, $L = 3.3 \text{ мГн}$, $OP_{1,2} - \text{TL082}$, $OP_3 - \text{LF356N}$, $D_{1,2} - 1\text{N4148}$, $R_1 = 2.7 \text{ кОм}$, $R_2 = R_4 = 7.4 \text{ кОм}$, $R_3 = 100 \text{ Ом}$, $R_5 = 186 \text{ кОм}$, $R_6 = 4.7 \text{ кОм}$, RC' , α – параметр, характеризующий нелинейный преобразователь, R_c – сопротивление связи.

Схема экспериментальной установки приведена на рис. 6. В качестве базового элемента схемы использовался радиотехнический генератор с нелинейным элементом и петлей обратной связи, аналогичный описанному в [49, 50]. В зависимости от установленных параметров этот генератор может демонстрировать различные режимы колебаний – как периодические, так и хаотические, поэтому значение параметра α нелинейного элемента было выбрано таким образом, чтобы исследуемый генератор находился в режиме хаотических колебаний. Хаотический генератор был подключен к системе сбора данных LCard L-783, встроенной в персональный компьютер, посредством которого фиксировалась динамика напряжения на конденсаторах C и C' . Полученные временные ряды в дальнейшем анализировались численно.

В качестве ведущего сигнала использовался предварительно оцифрованный и записанный с помощью аналогово-цифрового преобразователя (АЦП) сигнал этого же генератора, преобразованный в аналоговый сигнал с помощью цифроаналогового преобразователя (ЦАП). Сигнал вводился в систему с помощью однонаправленной диссипативной связи (см. рис. 6). Шумовой сигнал был получен с помощью функционального генератора Agilent 33220, который также вводился с помощью сумматора в устройство связи. Шумовой сигнал представлял собой δ -коррелированный белый шум с гауссовским распределением амплитуд шумового сигнала. Колебания ведомой системы также оцифровывались и передавались на компьютер для последующей обработки.

Как уже отмечалось выше, одним из наиболее простых и эффективных способов обнаружения режима обобщенной хаотической синхронизации является метод вспомогательной системы, т.е. одновременное рассмотрение поведения и ведомой системы, и ее точной копии (вспомогательной системы), стартующей с других началь-

ных условий. Однако создание точной копии радиотехнического генератора с идентичными ведомому параметрами является весьма сложной и нетривиальной задачей. Основным препятствием при этом является разброс параметров, присущий всем сериям электронных устройств. Традиционно подобная проблема решается подбором электронных устройств с максимально близкими параметрами, однако указанный метод позволяет получить систему, приближенную по параметрам к первоначальной, но не точную ее копию.

В то же время достаточно часто при проведении экспериментальных исследований используют следующий подход (см., например, [51]): оцифрованный заранее сигнал ведущей системы подается на ведомую систему дважды: первый раз система рассматривается как ведомый генератор, а второй – как вспомогательный, при этом разница в начальных условиях осуществляется автоматически. Обе временные реализации оцифровываются и затем, после удаления начальных участков, соответствующих переходному процессу, сравниваются друг с другом. Совпадение этих временных реализаций друг с другом свидетельствует о том, что имеет место режим обобщенной хаотической синхронизации, в полном соответствии с идеологией метода вспомогательной системы.

Исследуемый радиотехнический генератор может демонстрировать два характерных режима хаотической генерации: с аттрактором ленточного типа и аттрактором типа двойной спирали. Характерные фазовые портреты колебаний автономного генератора, соответствующие этим режимам, приведены на рис. 7.

Экспериментальные исследования проводились нами для трех различных случаев:

1) хаотические колебания в автономных ведущем и ведомом генераторах характеризуются аттракторами ленточного типа;

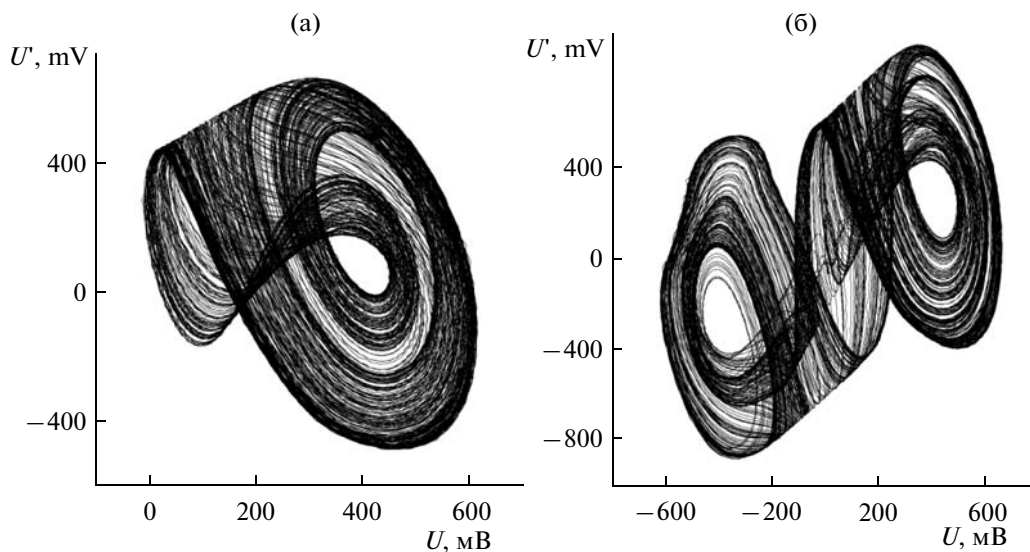


Рис. 7. Характерные фазовые портреты хаотических колебаний в автономном генераторе, наблюдаемые в радиотехническом эксперименте: а – аттрактор ленточного типа ($\alpha \approx 0.15$), б – аттрактор типа двойной спирали ($\alpha \approx 0.25$).

2) в ведущем генераторе реализуется хаотический режим, характеризующийся аттрактором ленточного типа, в то время как в ведомом генераторе наблюдается хаотический аттрактор типа двойной спирали;

3) хаотические колебания в автономных ведущем и ведомом генераторах характеризуются хаотическим аттрактором типа двойной спирали.

Каждый случай рассматривался в присутствии шума различной интенсивности. Для экспериментальных данных в роли интенсивности шума выступало отношение $D = P_{ш}/P_{ХС}$ мощности шума $P_{ш}$ к мощности хаотического сигнала $P_{ХС}$.

На рис. 8 представлена зависимость порогового значения параметра связи

$$\varepsilon = 1/R_c \sqrt{L/C},$$

соответствующего границе режима обобщенной синхронизации, от интенсивности шума для трех описанных выше случаев. Видно, что в диапазоне интенсивности шума $[0; 0.5]$ граница установления режима обобщенной хаотической синхронизации фактически остается неизменной.

Характерные сигналы с ведущей системы в отсутствие и при наличии аддитивного шума, воздействующие на ведомую систему, а также фазовые портреты ведомой системы и плоскости (U, V) , характеризующие поведение ведомой и вспомогательной систем, в отсутствие и при наличии режима обобщенной синхронизации в радиотехнических генераторах с аттракторами ленточного типа, показаны на рис. 9. Видно, что характеристики ведомой системы практически не меняются при появлении шума. Аналогичная си-

туация имеет место в системе двух однонаправленно связанных радиотехнических генераторов, характеризующихся в автономном режиме аттракторами типа двойной спирали в одном или в обоих из них. Можно сказать, что во всех рассмотренных случаях модифицированная система (т.е. рассматриваемый генератор с дополнительной диссипацией) демонстрирует периодические колебания периода 1. Дальнейшее увеличение интенсивности шума (когда она становится больше интенсивности детерминированного сигнала) может приводить к монотонному росту величины

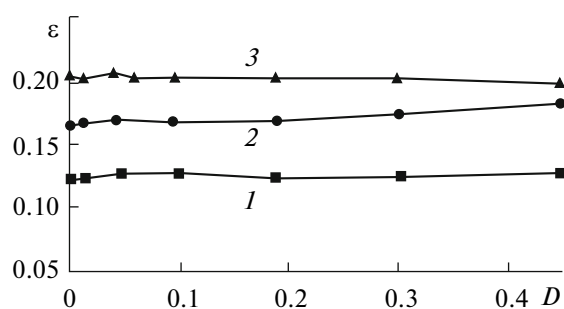


Рис. 8. Величина параметра связи, соответствующая установлению режима обобщенной хаотической синхронизации, как функция интенсивности шума: кривая 1 – оба рассматриваемых генератора в автономном режиме характеризуются ленточными хаотическими аттракторами; кривая 2 – ведущая система характеризуется ленточным хаотическим аттрактором, ведомый осциллятор демонстрирует хаотические колебания типа двойной спирали; кривая 3 – ведущий и ведомый генераторы в автономном режиме характеризуются хаотическими аттракторами типа двойной спирали.

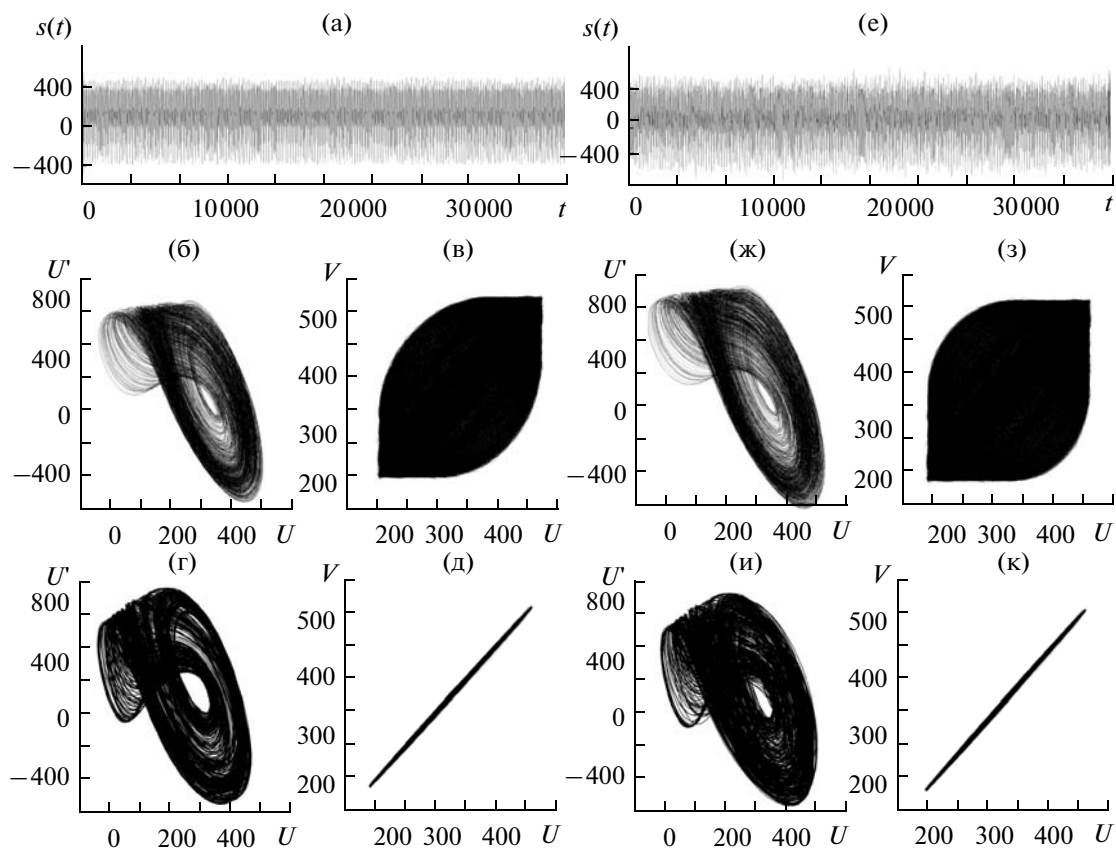


Рис. 9. Сигналы с ведущего хаотического генератора в отсутствие (а) и при наличии (е) источника шума, воздействующего на ведомый генератор, а также фазовые портреты ведомой системы (б, г, ж, и) и плоскости (U, V) , характеризующие поведение ведомой и вспомогательной систем (в, д, з, к) до ($\epsilon = 0.22$) и после ($\epsilon = 0.34$) установления режима обобщенной синхронизации. Управляющие параметры радиотехнических генераторов были выбраны таким образом, чтобы в обеих системах в автономном режиме реализовывались хаотические колебания ленточного типа; а–д – при отсутствии шума ($D = 0$), е–к – при наличии шума интенсивности $D = 0.4$.

параметра связи, при котором устанавливается режим обобщенной хаотической синхронизации.

Таким образом, результаты экспериментального исследования находятся в очень хорошем соответствии как с теоретическими, так и с численными данными, приведенными выше, и подтверждают устойчивость режима обобщенной хаотической синхронизации по отношению к шуму.

4. ПРАКТИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ УСТОЙЧИВОСТИ РЕЖИМА ОБОБЩЕННОЙ СИНХРОНИЗАЦИИ К ШУМАМ

Устойчивость режима обобщенной синхронизации к внешним шумам, выявленная в разд. 2 и 3 численно и экспериментально, может найти практическое применение, например, при скрытой передаче информации по каналам связи с высоким уровнем шумов. Более того, выявленная особенность может быть использована для повышения конфиденциальности передачи информации путем создания сложного сигнала, представ-

ляющего собой сумму детерминированного сигнала, содержащего полезную информацию, и стохастического сигнала для его последующей передачи по каналу связи.

Принимая во внимание выявленную особенность, мы предлагаем новый метод скрытой передачи информации на основе режима обобщенной синхронизации в присутствии шума. Принципиальная схема для его реализации показана на рис. 10.

Способ скрытой передачи информации предназначен для передачи цифровых сигналов и заключается в следующем. Информационный сигнал $m(t)$ кодируется в виде бинарного кода, который используется для модуляции одного или нескольких управляющих параметров передающего генератора хаоса $\bar{x}(t)$. Модуляция параметров должна осуществляться таким образом, чтобы характеристики передаваемого сигнала менялись незначительно, но при этом оставалась возможность возникновения/разрушения режима обобщенной синхронизации между генераторами передающего и принимающего устройств в

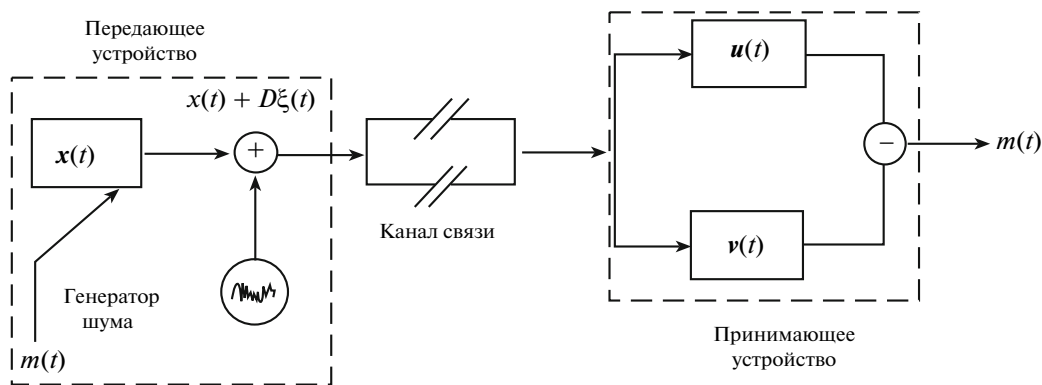


Рис. 10. Схема для реализации способа скрытой передачи информации на основе режима обобщенной хаотической синхронизации в присутствии шума.

зависимости от передаваемого бинарного бита. Для этого расположение границы обобщенной синхронизации на плоскости “параметр модуляции–интенсивность связи” должно обладать принципиальной особенностью: при малом изменении соответствующего параметра порог возникновения синхронного режима должен меняться достаточно резко. Для обеспечения дополнительной маскировки информационного сигнала и изменения характеристик передаваемого сигнала используется генератор шума. Сигнал, генерируемый передающей системой, примешивается в сумматоре к шумовому сигналу и далее передается по каналу связи. Здесь он также подвергается влиянию шумов и искажений, неизбежно присутствующих в реальных устройствах. Принимающее устройство находится на другой стороне канала связи. Оно представляет собой два идентичных хаотических генератора $\bar{u}(t)$ и $\bar{v}(t)$, способных находиться в режиме обобщенной синхронизации с передающим. Принцип работы принимающего устройства основан на диагностике режима обобщенной синхронизации при помощи метода вспомогательной системы. Сигнал с канала связи поступает на идентичные генераторы принимающего устройства. Полученные на выходе сигналы проходят через вычитающее устройство и затем детектируется восстановленный полезный сигнал $\tilde{m}(t)$.

Чтобы проверить эффективность предложенного способа скрытой передачи информации, проведем численное моделирование схемы (рис. 10). В качестве генераторов передающего и принимающего устройств выберем однонаправленно связанные системы Ресслера, описанные в разделе 2Б, с теми же самыми значениями управляющих параметров a , p , c , ω_u и тем же самым распределением случайной величины ζ . Значение параметра связи выберем равным $\varepsilon = 0.14$, в то время как амплитуду шумового сигнала, воз-

действующего на ведущую систему, примем равной $D_1 = 0$, а суммарную интенсивность шума (и производимого генератором шума на передающей стороне канала связи, и появляющегося в канале связи) выберем равной $D_2 = D = 10$.

Управляющий параметр ω_x передающего генератора модулируется бинарным цифровым сигналом следующим образом. Если в заданный интервал времени передается бинарный бит 1, тогда $\omega_x = 0.91$ на протяжении всего этого интервала. При передаче бинарного бита 0 параметр ω_x принимает случайное значение из диапазона $\omega_x \in [0.9, 0.91)$, т.е. расстройка параметров оказывается чрезвычайно малой, порядка 1.1%.

Выбор систем Ресслера в качестве моделей генераторов передающего и принимающего устройств обусловлен следующими причинами:

- 1) системы Ресслера в настоящее время достаточно хорошо исследованы, в том числе и с точки зрения обобщенной синхронизации [47, 52–54],
- 2) расположение границы обобщенной синхронизации удовлетворяет требованиям, указанным выше (см. также [54]),
- 3) возможно построить радиотехнический генератор, динамика которого будет описываться уравнениями системы Ресслера [55].

Выбор значений управляющих параметров обусловлен характером расположения границы обобщенной синхронизации, изученным в [54]. Отметим, что параметр ω_x может принимать достаточно произвольные значения: необходимым условием является лишь чередование областей с асинхронной динамикой и режимом обобщенной синхронизации.

Работоспособность предложенного способа скрытой передачи информации при наличии шума иллюстрирует рис. 11. В иллюстративных целях в качестве информационного сигнала $m(t)$

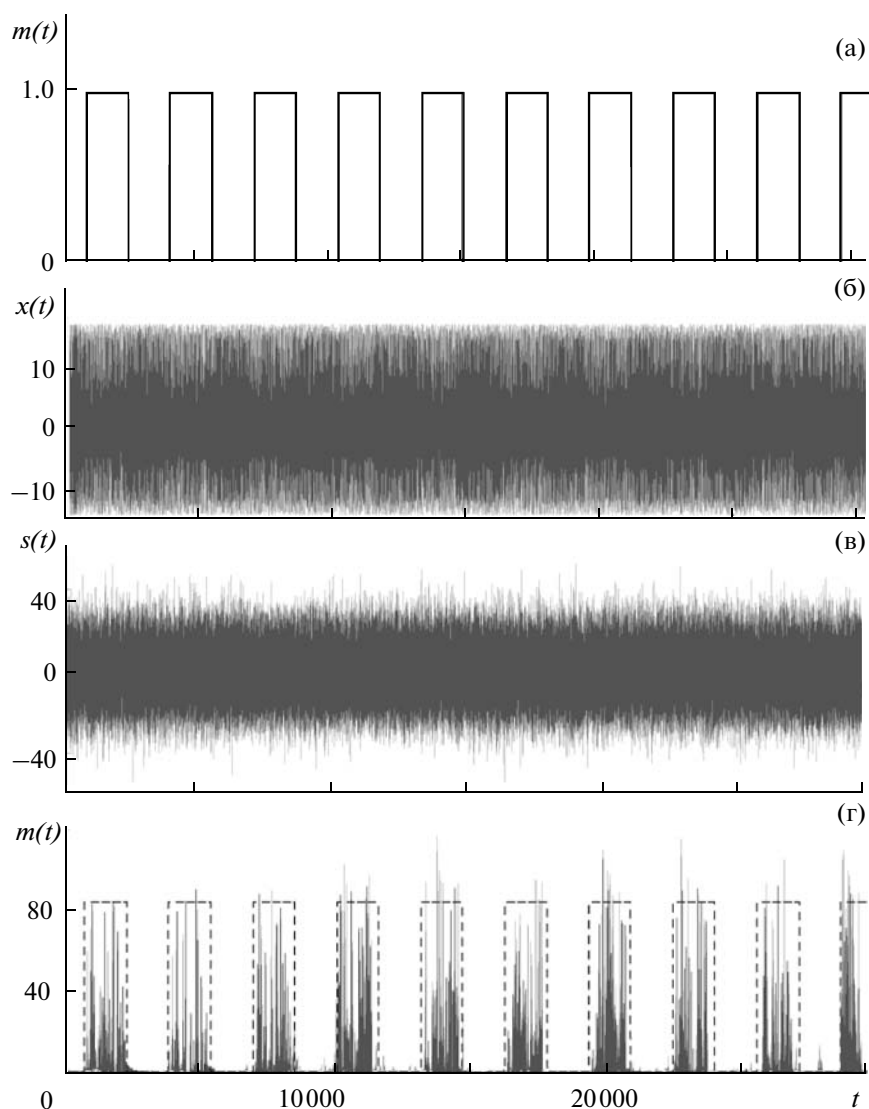


Рис. 11. Иллюстрация численной реализации способа скрытой передачи информации на основе обобщенной хаотической синхронизации в присутствии шума ($D = 10$): а – информационный сигнал $m(t)$, представленный простой последовательностью бинарных битов 0/1; б – сигнал $x(t)$, генерируемый передающей хаотической системой; в – сигнал $s(t)$, передаваемый по каналу связи; г – восстановленный сигнал $\hat{m}(t)$ (сплошная линия), и детектированный информационный сигнал после пропускания через фильтр нижних частот (пунктирная линия).

выбрана простая последовательность бинарных битов 0/1, представленная на рис. 11а. Как видно из рис. 11б, модуляция управляющего параметра ω_x практически не меняет характеристики сигнала, производимого передающим генератором хаоса. Более того, шум достаточно большой интенсивности еще больше искажает передаваемый сигнал (см. рис. 11в). В этом случае третья сторона не имеет никакой возможности декодировать исходное информационное сообщение без полной информации о характеристиках принимающего генератора хаоса. В то же время качество информации, восстановленной в принимающем устройстве, является достаточно высоким. Нетрудно заметить, что сигнала

приведенные на рис. 11а (исходный информационный сигнал) и рис. 11г (пунктирная линия – детектированный информационный сигнал) в точности совпадают, что и свидетельствует о высоком качестве передачи информации. Аналогичная ситуация имеет место при дальнейшем увеличении интенсивности шума D : способ становится неработоспособным при отношении энергии на 1 бит к спектральной плотности мощности шума [56, 57] $E_b/N_0 = -10.01$ дБ.

Для количественного сравнения предложенного способа скрытой передачи информации с известными аналогами, была рассчитана также величина E_b/N_0 , до которой другие известные схемы

Результаты расчета

Номер схемы	Название схемы	Ссылка	E_b/N_0 , дБ
1	Хаотическая маскировка	[6]	56.48
2	Переключение хаотических режимов	[58]	30.76
3	Нелинейное подмешивание	[59]	64.99
4	Модулирование управляющих параметров	[60]	30.76
5	Схема на основе режима фазовой синхронизации	[63]	32.40
6	Схема на основе режима обобщенной синхронизации	[61]	39.52
7	Схема на основе обобщенной и полной синхронизации	[61]	39.24
8	Схема со “сложным сигналом”	[62]	61.47
9	Сверхустойчивая к шумам схема	Данная работа	-10.01

скрытой передачи информации на основе хаотической синхронизации [6, 58–63] остаются работоспособными. Во всех случаях в качестве генераторов передающего и принимающего устройств были выбраны одинаково связанные системы Ресслера с близкими значениями управляющих параметров. Результаты расчета представлены в таблице. Из таблицы видно, что только предложенная схема становится неработоспособной при отрицательном отношении энергии на 1 бит к спектральной плотности шума, в то время как для других рассмотренных схем эта величина оказывается положительной. То есть при наличии в канале связи шумов определенного уровня, мощность которых меньше мощности передаваемого сигнала, большинство известных до настоящего времени схем становится неработоспособным. Понятно, что значения таких характеристик будут меняться от схемы к схеме. Из схем 1–8 в этом отношении лучшими являются показатели для схем на основе переключения хаотических режимов и модулирования управляющих параметров (схемы 2 и 4, $E_b/N_0 = 30.76$ дБ). Но положительное значение энергии на 1 бит к спектральной плотности мощности шума свидетельствует об ограниченной устойчивости к шумам и деструктивной роли шума при передаче информации.

Схема 9, предложенная в данной работе, обладает значительной устойчивостью по отношению к шумам в канале связи. При этом, еще более искажая передаваемый сигнал, шум препятствует третьей стороне декодировать информационное сообщение. В этом случае можно говорить о конструктивной роли шума в плане повышения кон-

фиденциальности передачи информации, в то время как в остальных случаях роль шума является деструктивной.

Следует отметить, что изменение значений управляющих параметров, уравнений генераторов и характеристик шумового сигнала может привести к изменению количественных значений отношения энергии на бит к спектральной плотности мощности шума, но порядок этих величин и соотношение между ними будут оставаться примерно теми же самыми. В частности, подобные результаты были получены для генераторов Чуа [64] и Рутькова [49] (экспериментально исследованных в разделе 3), используемых в передающем и принимающем устройствах, и различных распределений шумового сигнала.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе впервые проведено теоретическое, численное и экспериментальное исследование влияния шума на установление режима обобщенной синхронизации в диссипативно связанных динамических системах со слегка расстроенными параметрами. Показано, что независимо от типа системы и характера распределения случайной величины шум практически не оказывает влияния на порог возникновения синхронного режима в этом случае. Результаты теоретических рассуждений подтверждены результатами численного моделирования и/или экспериментального исследования одинаково связанных потоковых систем и дискретных отображений. Следует отметить, что аналогичные результаты были

получены также для пространственно-распределенных активных сред, описываемых находящимися в режиме пространственно-временного хаоса уравнениями Гинзбурга–Ландау.

Выявленная особенность поведения границы обобщенной синхронизации в присутствии шума может найти практическое применение в ряде областей науки и техники, например при скрытой передаче информации по каналам связи с высоким уровнем шумов. Предложен способ скрытой передачи информации на основе этого режима. Он обладает значительной устойчивостью к шумам, что позволяет использовать дополнительный генератор шума на передающей стороне канала связи с целью повышения конфиденциальности передачи информации. Более того, он является достаточно легко реализуемым на практике.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 08-02-00102, № 09-02-92421) и Федеральной целевой программы “Научные и научно-педагогические кадры инновационной России” на 2009–2013 гг.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Пиковский А.С., Розенблум М.Г., Куртс Ю. Синхронизация. Фундаментальное нелинейное явление. М.: Техносфера, 2003.
2. Boccaletti S., Kurths J., Osipov G.V., et al. // Phys. Rep. 2002. V. 366. P. 1.
3. Roy R. // Nature. 2005. V. 438. P. 298.
4. Jaeger H., Haas H. // Science. 2008. V. 304. № 4. P. 78.
5. Parlitz U., Chua L.O., Kocarev L., et al. // Intern. J. Bifurcation Chaos. 1992. V. 2. № 4. P. 973.
6. Cuomo M.K., Oppenheim A.V., Strogatz S.H. // IEEE Trans. 1993. V. CS-40. № 10. P. 626.
7. Yuan Z.L., Shields A.J. // Phys. Rev. Lett. 2005. V. 94. P. 048901.
8. Rohde G.K., Nichols J.M., Bucholtz F. // Chaos. 2008. V. 18. P. 013114.
9. Materassi D., Basso M. // Intern. J. Bifurcation Chaos. 2008. V. 18. № 2. P. 567.
10. Elson R.C. et al. // Phys. Rev. Lett. 1998. V. 81. № 25. P. 5692.
11. Porcher R., Thomas G. // Phys. Rev. E. 2001. V. 64. № 1. P. 010902.
12. Glass L. // Nature (London). 2001. V. 410. P. 277.
13. Rosenblum M.G., Pikovsky A.S., Kurths J. // Fluctuation Noise Lett. 2004. V. 4. № 1. P. L53.
14. Ticos C.M., Rosa E., Pardo W.B., et al. // Phys. Rev. Lett. 2000. V. 85. № 14. P. 2929.
15. Rosa E., Ticos C.M., Pardo W.B., et al. // Intern. J. Bifurcation Chaos. 2000. V. 10. № 11. P. 2551.
16. Hramov A.E., Koronovskii A.A., Popov P.V., et al. // Chaos. 2005. V. 15. № 1. P. 013705.
17. Dmitriev B.S., Hramov A., Koronovskii A., et al. // Phys. Rev. Lett. 2009. V. 102. № 7. P. 074101.
18. Rosenblum M.G., Pikovsky A.S., Kurths J. // Phys. Rev. Lett. 1996. V. 76. № 11. P. 1804.
19. Rulkov N.F., Sushchik M.M., Tsimring L.S., et al. // Phys. Rev. E. 1995. V. 51. № 2. P. 980.
20. Rosenblum M.G., Pikovsky A.S., Kurths J. // Phys. Rev. Lett. 1997. V. 78. № 22. P. 4193.
21. Pecora L.M., Carroll T.L. // Phys. Rev. Lett. 1990. V. 64. № 8. P. 821.
22. Fahy S., Hamann D.R. // Phys. Rev. Lett. 1992. V. 69. № 5. P. 761.
23. Hramov A.E., Koronovskii A.A. // Chaos. 2004. V. 14. № 3. P. 603.
24. Ali M.K. // Phys. Rev. E. 1997. V. 55. № 4. P. 4804.
25. Toral R., Mirasso C.R., Hernández-García E., et al. Chaos. 2001. V. 11. № 3. P. 665.
26. Анищенко В.С., Вадивасова Т.Е. // ПЭ. 2002. Т. 47. № 2. С. 133.
27. Zhou C.T., Kurths J. // Phys. Rev. Lett. 2002. V. 88. P. 230602.
28. Zhou C.T., Kurths J., Kiss I.Z., et al. // Phys. Rev. Lett. 2002. V. 89. № 1. P. 014101.
29. Kim S., Lim W., Jalnine A., et al. // Phys. Rev. E. 2003. V. 67. № 1. P. 016217.
30. Zhou C.T., Kurths J., Allaria E., et al. // Phys. Rev. E. 2003. V. 67. P. 015205.
31. Goldobin D.S., Pikovsky A.S. // Phys. Rev. E. 2005. V. 71. № 4. P. 045201.
32. Hramov A.E., Koronovskii A.A., Moskalenko O.I. // Phys. Lett. A. 2006. V. 354. № 5–6. P. 423.
33. Guan S., Lai Y.C., Lai C.H. // Phys. Rev. E. 2006. V. 73. P. 046210.
34. Heagy J.F., Carroll T.L., Pecora L.M. // Phys. Rev. E. 1995. V. 52. № 2. P. R1253.
35. Gauthier D.J., Bienfang J.C. // Phys. Rev. Lett. 1996. V. 77. № 9. P. 1751.
36. Martian A., Banavar J.R. // Phys. Rev. Lett. 1994. V. 72. № 10. P. 1451.
37. Jensen R.V. // Phys. Rev. E. 1998. V. 58. № 6. P. R6907.
38. Zhu L., Raghu A., Lai Y.C. // Phys. Rev. Lett. 2001. V. 86. № 18. P. 4017.
39. Короновский А.А., Москаленко О.И., Попов П.В. и др. // Изв. РАН. Сер. физ. 2008. Т. 72. № 1. С. 143.
40. Короновский А.А., Москаленко О.И., Попов П.В. и др. // Первая Миля. 2008. Т. 4. № 1. С. 14.
41. Pyragas K. // Phys. Rev. E. 1996. V. 54. № 5. P. R4508.
42. Pecora L.M., Carroll T.L., Heagy J.F. // Phys. Rev. E. 1995. V. 52. № 4. P. 3420.
43. Pecora L.M., Carroll T.L. // Phys. Rev. A. 1991. V. 44. № 4. P. 2374.
44. Pyragas K. // Phys. Rev. E. 1997. V. 56. № 5. P. 5183.
45. Abarbanel H.D.I., Rulkov N.F., Sushchik M.M. // Phys. Rev. E. 1996. V. 53. № 5. P. 4528.
46. Короновский А.А., Москаленко О.И., Храмов А.Е. // ЖТФ. 2006. Т. 76. № 2. С. 1–9.
47. Hramov A.E., Koronovskii A.A. // Phys. Rev. E. 2005. V. 71. № 6. P. 067201.
48. Никитин Н.Н., Первачев С.В., Разевиг В.Д. // АиТ. 1975. Т. 4. С. 133.
49. Rulkov N.F. // Chaos. 1996. V. 6. P. 262.

50. *Hramov A.E., Koronovskii A.A., Kurovskaya M.K., et al.* // Phys. Rev. E. 2007. V. 76. № 2. P. 026206.
51. *Uchida A., McAllister R., Meucci R., et al.* // Phys. Rev. Lett. 2003. V. 91. № 17. P. 174101.
52. *Zheng Z., Hu G.* // Phys. Rev. E. 2000. V. 62. № 6. P. 7882.
53. *Hramov A.E., Koronovskii A.A.* // Europhys. Lett. 2005. V. 70. № 2. P. 169.
54. *Hramov A.E., Koronovskii A.A., Moskalenko O.I.* // Europhysics. Lett. 2005. V. 72. № 6. P. 901.
55. *Rico-Martinez R., Kreischer K.E., Flätgen G., et al.* // Physica D. 2003. V. 176. P. 1.
56. *Скляр Б.* Цифровая связь. Теоретические основы и практическое применение. М.: Вильямс, 2003.
57. *Побережский Е.С.* Цифровые радиоприемные устройства. М.: Радио и связь, 1987.
58. *Dedieu H., Kennedy M.P., Hasler M.* // IEEE Trans. 1993. V. CS-40. P. 634.
59. *Dmitriev A.S., Panas A.I., Starkov S.O.* // Int. J. Bifurcations and Chaos. 1995. V. 5. № 4. P. 1249.
60. *Yang T., Chua L.O.* // IEEE Trans. 1996. V. CS-43. P. 817.
61. *Terry J., Van Wiggeren G.* // Chaos, Solitons Fractals. 2001. V. 12. P. 145.
62. *Murali K., Lakshmanan M.* // Phys. Lett. A. 1998. V. 241. P. 303.
63. *Chen J.Y., Wong K.W., Cheng L.M.* // Chaos. 2003. V. 13. № 2. P. 508.
64. *Chua L.O., Komuro M., Matsumoto T.* // IEEE Trans. 1986. V. CS-33. № 11. P. 1073.