

УДК 517.9

ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ОБОБЩЕННОЙ СИНХРОНИЗАЦИИ ДИССИПАТИВНО СВЯЗАННЫХ ХАОТИЧЕСКИХ СИСТЕМ В ПРИСУТСТВИИ ШУМА

© 2009 г. А. А. Короновский, О. И. Москаленко, А. А. Овчинников, А. Е. Храмов

ГОУ ВПО Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского

E-mail: alkor@nonlin.sgu.ru

Исследовано влияние шума на обобщенную синхронизацию в диссипативно связанных хаотических системах. Показано, что шум практически не оказывает влияния на порог возникновения синхронного режима. Причины возникновения выявленной особенности объяснены при помощи метода модифицированной системы (Храмов А.Е., Короновский А.А. // Phys. Rev. E. 2005. V. 71. 067201) и подтверждены результатами численного моделирования однонаправленно связанных динамических систем с непрерывным и дискретным временем.

ВВЕДЕНИЕ

Синхронизация хаотических колебаний представляет собой одно из фундаментальных явлений нелинейной динамики, привлекающих к себе пристальное внимание исследователей [1, 2]. Интерес к этому феномену связан как с большим фундаментальным значением его исследования, так и с широким кругом практических приложений, например при скрытой передаче информации, в биологических, химических, физических задачах, при управлении хаосом, в том числе в системах СВЧ-электроники [3–5].

В настоящее время выявлено несколько типов синхронного поведения однонаправленно и взаимно связанных динамических систем, каждый из которых обладает своими принципиальными особенностями, например фазовая синхронизация, обобщенная синхронизация, синхронизация с запаздыванием, полная синхронизация, синхронизация, индуцированная шумом, синхронизация временных масштабов и др [1, 6].

Один из наиболее важных вопросов, связанных с изучением явления хаотической синхронизации, — это влияние шума на установление синхронных режимов. Известно, что шум может оказывать как конструктивное, так и деструктивное воздействие на поведение систем. В частности, влияние внешнего шума может привести к сдвигу пороговых значений параметра связи, соответствующих установлению режимов полной и фазовой синхронизаций [7, 8]. В то же самое время общий шум способен синхронизовать две невзаимодействующие, но идентичные системы (стартующие с различных начальных условий). В этом случае диагностируется режим индуцированной шумом синхронизации [9, 10].

Влияние шума на обобщенную синхронизацию [11] в настоящее время исследовано слабо. В качестве исключения можно отметить работу [12], где изучен вопрос о влиянии шума на обобщенную синхронизацию в совершенно разных однонаправленно связанных динамических системах. Показано, что в этом случае роль шума является “системозависимой”, т.е. шум способен как усилить/вызвать, так и, наоборот, разрушить режим обобщенной синхронизации.

В настоящей работе впервые исследовано влияние шума на возникновение обобщенной синхронизации в диссипативно связанных идентичных хаотических системах со слегка расстроенными параметрами. Как показано ниже, шум практически не оказывает влияния на порог возникновения режима обобщенной синхронизации в таких системах, а следовательно, режим обобщенной синхронизации обладает устойчивостью к шумам. Выявленная особенность может найти применение в различных областях науки и техники, например при скрытой передаче информации по каналам связи, где уровень шума достаточно высок [13, 14].

1. РЕЖИМ ОБОБЩЕННОЙ СИНХРОНИЗАЦИИ

Режим обобщенной синхронизации двух однонаправленно связанных хаотических осцилляторов означает, что после завершения переходного процесса между состояниями ведущей $\vec{x}(t)$ и ведомой $\vec{u}(t)$ систем устанавливается некоторое функциональное соотношение $\vec{u}(t) = \vec{F}[\vec{x}(t)]$, вид которого может быть достаточно сложным, в том числе и фрактальным [11]. Найти такое соотношение аналитически, как правило, далеко не все-

гда представляется возможным. В то же время известны эффективные методы диагностики этого режима, среди которых наибольшее распространение получил метод вспомогательной системы [15]. Согласно этому методу, наряду с ведомой системой рассматривается идентичная ей вспомогательная система. Начальные условия для вспомогательной системы выбираются отличными от начального состояния ведомой системы, но лежащими в области притяжения одного и того же хаотического аттрактора. В случае отсутствия режима обобщенной синхронизации между взаимодействующими системами векторы состояния ведомой и вспомогательной систем принадлежат одному и тому же хаотическому аттрактору, но различны за счет ляпуновской неустойчивости хаотических траекторий. В том случае, когда имеет место режим обобщенной синхронизации, в силу выполнения функциональных соотношений между состояниями ведущей и ведомой систем и соответственно ведущей и вспомогательной после завершения переходного процесса состояния ведомой и вспомогательной систем должны стать идентичными. Таким образом, эквивалентность состояний ведомой и вспомогательной систем после завершения переходного процесса является критерием наличия обобщенной синхронизации между ведущей и ведомой хаотическими системами.

Анализ режима обобщенной синхронизации может быть проведен также при помощи вычисления условных ляпуновских экспонент [16]. В этом случае рассчитываются ляпуновские показатели для ведомой системы, а так как ее поведение зависит от состояния ведущей системы, эти ляпуновские показатели отличаются от ляпуновских экспонент автономной системы и называются условными. Критерием существования обобщенной синхронизации в однонаправленно связанных динамических системах является отрицательность старшего условного ляпуновского показателя.

Режим обобщенной синхронизации может наблюдаться в системах с различным типом связи: диссипативным и недиссипативным [16, 17]. Для диссипативно связанных идентичных динамических систем со слегка расстроенными параметрами уравнения, описывающие динамику систем, могут быть записаны в виде

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}}(t) &= \mathbf{H}(\bar{x}(t), \bar{g}_d), \\ \dot{\bar{u}}(t) &= \mathbf{H}(\bar{u}(t), \bar{g}_r) + \varepsilon \mathbf{A}(\bar{x}(t) - \bar{u}(t)), \end{aligned} \quad (1)$$

где $\bar{x}(t) = (x_1, x_2, x_3)^T$ и $\bar{u}(t) = (u_1, u_2, u_3)^T$ – векторы состояния ведущей и ведомой систем соответственно, \mathbf{H} определяет векторное поле рассматриваемых систем, \bar{g}_d и \bar{g}_r – векторы параметров, $\mathbf{A} = \{\delta_{ij}\}$ – матрица связи, $\delta_{ii} = 0$, $\delta_{ij} = 0$ или $\delta_{ij} = 1$, ε – параметр связи.

Для выявления механизмов, приводящих к возникновению режима обобщенной синхронизации в системе (1), воспользуемся методом модифицированной системы [18]. Согласно этому подходу, ведомая система может быть рассмотрена как некоторая модифицированная система

$$\dot{\bar{u}}_m(t) = \mathbf{H}'(\bar{u}_m(t), \bar{g}_r, \varepsilon) = \mathbf{H}(\bar{u}(t), \bar{g}_r) - \varepsilon \mathbf{A} \bar{u}(t) \quad (2)$$

с дополнительно введенной диссипацией, находящаяся под внешним воздействием $\varepsilon \mathbf{A} \bar{x}(t)$. Режим обобщенной синхронизации, возникающий в системе (1), может быть рассмотрен как следствие двух взаимосвязанных процессов, протекающих одновременно, увеличения диссипации в модифицированной системе (2) и возрастания амплитуды внешнего воздействия. Оба процесса связаны друг с другом посредством параметра ε и не могут быть реализованы в ведомой системе (1) отдельно друг от друга. Однако увеличение диссипации в модифицированной системе (2) приводит к упрощению ее поведения и переходу от хаотических колебаний к периодическим. Внешнее воздействие, наоборот, стремится усложнить поведение модифицированной системы и навязать ей свою динамику. Очевидно, что возникновение режима обобщенной синхронизации возможно только тогда, когда собственная хаотическая динамика в ведомой системе будет подавленной за счет диссипации.

Таким образом, устойчивость режима обобщенной синхронизации определяется прежде всего свойствами самой модифицированной системы. Добавление внешнего шума $\mathbf{B}D\xi(t)$ (где \mathbf{B} – матрица связи, аналогичная \mathbf{A}) в уравнения системы (1) не должно приводить к существенному изменению характеристик модифицированной системы. Если внешний шум практически не меняет характеристики модифицированной системы, то порог возникновения режима обобщенной синхронизации не должен сильно зависеть от интенсивности шума D .

Действительно, как упоминалось выше, диагностирование режима обобщенной синхронизации возможно как при помощи метода вспомогательной системы, так и путем расчета условных ляпуновских экспонент. Понятно, что ведомая и вспомогательная системы могут быть рассмотрены как две идентичные системы, стартующие с близких начальных условий. Вычисление производной при наличии и отсутствии шума от разности их состояний $\bar{\Delta}(t) = \bar{v}(t) - \bar{u}(t)$ ввиду идентичности детерминированных и стохастических сигналов, воздействующих на эти системы, приводит к одному и тому же уравнению:

$$\dot{\bar{\Delta}}(t) = (\mathbf{J}\mathbf{H}(\bar{u}(t)) - \varepsilon \mathbf{A})\bar{\Delta}(t) = \mathbf{J}\mathbf{H}'(\bar{u}(t))\bar{\Delta}(t), \quad (3)$$

где \mathbf{J} – матрица Якоби. Так как уравнение (3) может быть рассмотрено как уравнение в вариациях при вычислении условных ляпуновских экспо-

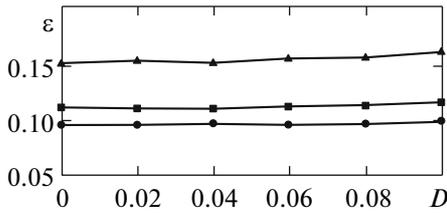


Рис. 1. Зависимость порога возникновения режима обобщенной хаотической синхронизации в двух одинаково связанных логистических отображениях (4) от интенсивности шума для различных значений управляющих параметров: $\lambda_x = 3.75, \lambda_y = 3.75$ (●), $\lambda_x = 3.75, \lambda_y = 3.79$ (■), $\lambda_x = 3.75, \lambda_y = 3.90$ (▲).

мент, можно заключить, что старшие условные ляпуновские показатели (определяющие порог возникновения режима обобщенной синхронизации) будут вести себя схожим образом как в отсутствие, так и при наличии шума, поэтому порог возникновения режима обобщенной синхронизации не должен зависеть от интенсивности шума, а сам тип синхронного поведения должен обладать устойчивостью к шумам. Тем не менее следует обратить внимание на то, что вектор состояния ведомой системы $\vec{u}(t)$ в (3) все-таки зависит от случайного сигнала $\xi(t)$, и соответственно шум большой интенсивности D может изменять свойства модифицированной системы, что в конечном итоге может приводить к изменению границы возникновения режима обобщенной синхронизации.

2. ВЛИЯНИЕ ШУМА НА УСТАНОВЛЕНИЕ РЕЖИМА ОБОБЩЕННОЙ СИНХРОНИЗАЦИИ В СИСТЕМАХ С ДИСКРЕТНЫМ ВРЕМЕНЕМ

Чтобы подтвердить справедливость теоретических рассуждений, изложенных выше, рассмотрим в качестве первого примера поведение одинаково связанных логистических отображений в случае, когда на ведомую систему дополнительно воздействует внешний источник шума:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= f(x_n, \lambda_x), \\ y_{n+1} &= f(y_n, \lambda_y) + \varepsilon(f(x_n, \lambda_x) + Df(\xi_n, \lambda_x) - f(y_n, \lambda_y)), \end{aligned} \quad (4)$$

где $f(x, \lambda) = \lambda x(1-x)$, $\lambda_{x,y}$ – управляющие параметры ведущей и ведомой систем соответственно, величина ε характеризует интенсивность связи между осцилляторами, ξ_n – случайный процесс с равномерно распределенной плотностью вероятности на единичном интервале $[0;1]$, D – интенсивность шума. Для диагностики режима обобщенной синхронизации в системе (1) использовался метод вспомогательной системы, описанный в разделе 1.

Зависимость порога возникновения режима обобщенной синхронизации от интенсивности шума D при различных значениях управляющих параметров $\lambda_{x,y}$ приведена на рис. 1. Из рисунка видно, что пороговое значение параметра связи ε практически не зависит от интенсивности шума в диапазоне значений $D \in [0; 0.1]$. Для объяснения подобного поведения рассматриваемых систем следует обратить внимание на модифицированную систему

$$z_{n+1} = (1 - \varepsilon)f(z_n, \lambda_y). \quad (5)$$

Для величины параметра связи, соответствующей порогу возникновения режима обобщенной синхронизации в системе (4), модифицированная система (5) демонстрирует периодические колебания [18]. Внешнее шумовое воздействие практически не изменяет характеристики ведомой системы, и соответственно практически не влияет на порог возникновения режима обобщенной синхронизации. В то же самое время последующее увеличение интенсивности шума может приводить к изменению свойств модифицированной системы: в частности, случайное воздействие достаточно большой амплитуды может вывести систему из бассейна притяжения устойчивого цикла, что, в свою очередь, приводит к “уходу” изображающей точки на бесконечность. Тем не менее режим обобщенной синхронизации в системе (4) характеризуется устойчивостью к шумам в достаточно широком диапазоне значений интенсивности шума D .

3. ВЛИЯНИЕ ШУМА НА УСТАНОВЛЕНИЕ РЕЖИМА ОБОБЩЕННОЙ СИНХРОНИЗАЦИИ В СИСТЕМАХ С НЕПРЕРЫВНЫМ ВРЕМЕНЕМ

В качестве следующего примера рассмотрим две одинаково связанные системы Ресслера:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -\omega_x x_2 - x_3 + \varepsilon D \xi, \\ \dot{x}_2 &= \omega_x x_1 + a x_2, \\ \dot{x}_3 &= p + x_3(x_1 - c), \\ \dot{u}_1 &= -\omega_u u_2 - u_3 + \varepsilon(x_1 + D \zeta - u_1), \\ \dot{u}_2 &= \omega_u u_1 + a u_2, \\ \dot{u}_3 &= p + u_3(u_1 - c), \end{aligned} \quad (6)$$

где $\vec{x}(t) = (x_1, x_2, x_3)^T$ и $\vec{u}(t) = (u_1, u_2, u_3)^T$ – векторы состояния ведущей и ведомой систем соответственно, $a = 0.15, p = 0.2, c = 10, \omega_x, \omega_u = 0.95$ – управляющие параметры, слагаемые $\varepsilon D \xi(t), \varepsilon D \zeta(t)$ задают внешнее шумовое воздействие на взаимодействующие системы, $\xi(t), \zeta(t)$ – случайные гауссовы процессы с нулевым средним и дисперсией $\sigma = 1.0$. Для интегрирования системы уравнений (6) использован метод Рунге–Кутты четвертого порядка, адаптированный для стохастических диффе-

ренциальных уравнений [19] с шагом по времени $\Delta t = 0.001$, диагностика режима обобщенной хаотической синхронизации осуществлялась с помощью метода вспомогательной системы (см. разд. 1).

На рис. 2 приведена зависимость порога возникновения режима обобщенной хаотической синхронизации от интенсивности шума для трех различных значений управляющего параметра ω_x при фиксированных значениях остальных управляющих параметров. Для наиболее полной картины, значения ω_x были выбраны следующими: $\omega_x = 0.99$ — относительно большая величина частотной расстройки взаимодействующих хаотических осцилляторов, $\omega_x = 0.95$ — идентичные осцилляторы, $\omega_x = 0.91$ — малые частотные расстройки [20].

Нетрудно заметить, что независимо от величины управляющего параметра ω_x порог возникновения режима обобщенной хаотической синхронизации практически не зависит от интенсивности шума D , и даже для достаточно больших значений $D > 20$ режим обобщенной синхронизации возникает примерно при тех же значениях параметра связи ε , что и в случае без шума. Показано, что в рассматриваемом случае внешний шум практически не изменяет свойства устойчивости модифицированной системы:

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= -\omega_u z_2 - z_3 - \varepsilon z_1, \\ \dot{z}_2 &= \omega_u z_1 + a z_2, \\ \dot{z}_3 &= p + z_3(z_1 - c),\end{aligned}\quad (7)$$

где $\vec{z}(t) = (z_1, z_2, z_3)^T$ — вектор состояния модифицированной системы. При указанных значениях управляющих параметров в модифицированной системе (7) реализуется устойчивый цикл периода один (см. также [20]).

Итак, из приведенного теоретического рассмотрения видно, что шум практически не влияет на границу возникновения режима обобщенной хаотической синхронизации и, следовательно, можно говорить об устойчивости режима обобщенной хаотической синхронизации к внешнему шуму в системах с малым числом степеней свободы.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе впервые проведено теоретическое и численное исследование влияния шума на установление режима обобщенной синхронизации в диссипативно связанных динамических системах со слегка расстроенными параметрами. Показано, что независимо от типа системы и характера распределения случайной величины шум практически не оказывает влияния на порог возникновения синхронного режима в этом случае. Результаты теоретических рассуждений подтверждены численным моделированием однонаправ-

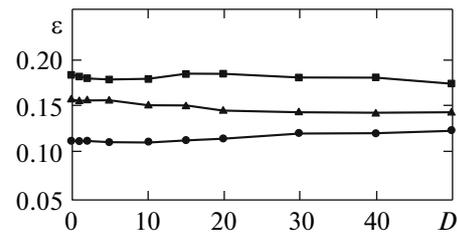


Рис. 2. Зависимость границы обобщенной хаотической синхронизации в двух однонаправленно связанных осцилляторах Ресслера (6), находящихся под воздействием общего источника шума, от его интенсивности для различных значений параметра ω_x ведущей системы: $\omega_x = 0.99$ (●), $\omega_x = 0.95$ (■), $\omega_x = 0.91$ (▲).

ленно связанных потоковых систем и дискретных отображений. В то же время аналогичные результаты были получены численно для пространственно распределенных сред, описываемых уравнениями Гинзбурга–Ландау [21], и экспериментально на примере однонаправленно связанных радиотехнических генераторов хаоса радиодиапазона [22].

Выявленная особенность поведения границы обобщенной синхронизации в присутствии шума может найти практическое применение в ряде областей науки и технике, например при скрытой передаче информации по каналам связи с высоким уровнем шумов [13, 14].

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты № 08-02-00102, 09-02-92421), Президентской программы поддержки ведущих научных школ РФ (проект НШ-355.2008.2), аналитической ведомственной программы “Развитие научного потенциала высшей школы”, ФЦП “Научные и научно-педагогические кадры инновационной России” на 2009–2013 годы”.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Boccaletti S., Kurths J., Osipov G.V. et al. // Phys. Rep. 2002. V. 366. P. 1.
2. Пиковский А.С., Розенблюм М.Г., Куртс Ю. Синхронизация. Фундаментальное нелинейное явление. М.: Техносфера, 2003.
3. Glass L. // Nature (London). 2001. V. 410. P. 277.
4. Roy R. // Nature. 2005. V. 438. P. 298.
5. Dmitriev B.S., Hramov A.E., Koronovskii A.A. et al. // Phys. Rev. Lett. 2009. V. 102. № 7. 074101.
6. Hramov A.E., Koronovskii A.A. // Chaos. 2004. V. 14. № 3. P. 603.
7. Gauthier D.J., Bienfang J.C. // Phys. Rev. Lett. 1996. V. 77. № 9. P. 1751.
8. Zhu L., Raghu A., Lai Y.C. // Phys. Rev. Lett. 2001. V. 86. № 18. P. 4017.
9. Toral R., Mirasso C.R., Hernandez-Garcia E., Piro O. // Chaos. 2001. V. 11. № 3. P. 665.

10. *Hramov A.E., Koronovskii A.A., Moskalenko O.I.* // Phys. Lett. A. 2006. V. 354. № 5–6. P. 423.
11. *Rulkov N.F., Sushchik M.M., Tsimring L.S., Abarbanel H.D.I.* // Phys. Rev. E. 1995. V. 51. № 2. P. 980.
12. *Guan S., Lai Y.C., Lai C.H.* // Phys. Rev. E. 2006. V. 73. 046210.
13. *Короновский А.А., Москаленко О.И., Попов П.В., Храмов А.Е.* // Первая Миля. 2008. Т. 4. № 1. С. 14.
14. *Короновский А.А., Москаленко О.И., Попов П.В., Храмов А.Е.* // Изв. РАН. Сер. физ. 2008. Т. 72. № 1. С. 143.
15. *Abarbanel H.D.I., Rulkov N.F., Sushchik M.M.* // Phys. Rev. E. 1996. V. 53. № 5. P. 4528.
16. *Pyragas K.* // Phys. Rev. E. 1996. V. 54. № 5. P. R4508.
17. *Короновский А.А., Москаленко О.И., Храмов А.Е.* // ЖТФ. 2006. Т. 76. № 2. С. 1.
18. *Hramov A.E., Koronovskii A.A.* // Phys. Rev. E. 2005. V. 71. № 6. 067201.
19. *Никитин Н.Н., Первачев С.В., Разевиг В.Д.* // Автоматика и телемеханика. 1975. Т. 4. С. 133.
20. *Hramov A.E., Koronovskii A.A., Moskalenko O.I.* // Europhys. Lett. 2005. V. 72. № 6. P. 901.
21. *Короновский А.А., Попов П.В., Храмов А.Е.* // ЖЭТФ. 2006. Т. 130. № 4(10). С. 748.
22. *Rulkov N.F.* // Chaos. 1996. V. 6. P. 262.