

ХАОТИЧЕСКАЯ СИНХРОНИЗАЦИЯ В РАСПРЕДЕЛЕННЫХ ПУЧКОВО-ПЛАЗМЕННЫХ СИСТЕМАХ СО СВЕРХКРИТИЧЕСКИМ ТОКОМ

© 2007 г. А. А. Короновский, Р. А. Филатов, А. Е. Храмов

Поступила в редакцию 12.09.2005 г.

Обнаружено возникновение хаотической синхронизации в связанных пучково-плазменных системах со сверхкритическим током. Показано, что с увеличением связи распределенные пучково-плазменные системы демонстрируют переход от асинхронного поведения через фазовую к полной хаотической синхронизации. Для исследования хаотической синхронизации используется методика основанная на введении непрерывного множества фаз хаотического сигнала. В случае однонаправленной связи в пучково-плазменных системах наблюдается режим обобщенной хаотической синхронизации, механизм возникновения которой анализировался с помощью метода модифицированной системы.

ВВЕДЕНИЕ

Изучение явления синхронизации хаотических колебаний в системах различной природы является в настоящее время одним из важнейших направлений исследований в области радиофизики и нелинейной динамики [1–3]. Режимы хаотической синхронизации наблюдаются для целого ряда связанных физических, химических, биологических систем [4–6] и требуют различных подходов к диагностике соответствующих синхронных режимов [7–12]. В настоящее время различают несколько типов хаотической синхронизации, таких как обобщенная [13], фазовая [2], синхронизация с запаздыванием [10], полная синхронизация [14], а также синхронизацию временных масштабов [12, 15], которая обобщает перечисленные выше типы хаотической синхронизации [16–18].

Обобщенная синхронизация [13] означает, что существует некоторая функциональная зависимость между состояниями хаотических осцилляторов, т.е. $\vec{x}_2(t) = \vec{F}[\vec{x}_1(t)]$, где $\vec{x}_{1,2}$ – векторы состояний связанных систем. Фазовая синхронизация [2] означает, что происходит захват фаз хаотических сигналов, в то время как амплитуды этих сигналов остаются несвязанными друг с другом и выглядят хаотическими. Под синхронизацией с запаздыванием [10] понимается режим совместных колебаний, при котором динамика каждой из подсистем происходит с некоторым сдвигом по времени τ : $\vec{x}_1(t) \approx \vec{x}_2(t - \tau)$. Наконец, полная синхронизация [14] предполагает идентичную динамику хаотических осцилляторов: $\vec{x}_1(t) \approx \vec{x}_2(t)$.

В наших работах [12, 15–18] было показано, что обобщенная, фазовая, лаг- и полная синхронизации тесно связаны между собой и, по сути де-

ла, являются одним видом синхронных колебаний связанных осцилляторов, названным синхронизацией временных масштабов. Характер синхронного режима (фазовая, обобщенная, лаг- или полная синхронизация) определяется количеством синхронизованных временных масштабов, вводимых с помощью непрерывного вейвлетного преобразования [19]. Поскольку временной масштаб s связан с частотой, то синхронизация хаотических колебаний связана с возникновением фазовой связи между частотными компонентами ω фурье-спектров $S(\omega)$ [12, 20].

Большинство исследований, посвященных хаотической синхронизации, проводилось для систем с малым числом степеней свободы [1–3, 14] или эталонных моделей распределенных систем (цепочки и решетки связанных нелинейных хаотических осцилляторов [21, 22], связанных уравнений Гинзбурга-Ландау [1, 23], Курамото-Сивашинского [24] и др.). Детальных исследований хаотической синхронизации в пучково-плазменных системах практически не проводилось (редким исключением является работа [25]). Для таких систем не изучались переходы между различными типами хаотической синхронизации, не были выявлены аналогии с хаотической синхронизацией систем с малым числом степеней свободы. Представляется весьма важным и актуальным изучение явления хаотической синхронизации в распределенных пучково-плазменных системах сверхвысокочастотного (СВЧ) диапазона в связи с широкими возможностями применения таких режимов для передачи информации с помощью хаотических колебаний [26], а также управления хаотическими колебаниями в системах СВЧ-электроники [27, 28].

Целью настоящей работы является изучение хаотической синхронизации в связанных пучково-плазменных системах со сверхкритическим током – гидродинамических моделях диода Пирса [29, Лекция 4], которые вызывают значительный интерес в качестве моделей плазменных систем, демонстрирующих различные типы хаотического поведения [29–36].

1. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Диод Пирса представляет собой две бесконечных плоских параллельных сетки, пронизываемые моноэнергетическим на входе электронным потоком. Сетки, ограничивающие систему, заземлены и находятся на расстоянии L друг от друга. Плотность заряда ρ_0 и скорость v_0 на входе в систему поддерживаются постоянными. Пространство между сетками равномерно заполнено нейтрализующим фоном неподвижных ионов. Плотность нейтрализующего заряда $|\rho_i|$ в классическом диоде Пирса равна невозмущенной плотности заряда $|\rho_0|$ в потоке.

Единственным управляющим параметром задачи является параметр Пирса $\alpha = \omega_p L / v_0$, имеющий смысл невозмущенной угла пролета электронов по плазменной частоте ω_p (v_0 – скорость электронов на входе в межсеточном пространстве, L – расстояние между сетками). Электронный поток, движущийся в диоде Пирса, является одной из простейших систем электронно-плазменной природы. Данная модель, являясь моделью распределенной активной среды, позволяет рассмотреть различные неустойчивости, возникающие в электронном потоке, влияние на них граничных условий [38, 39]. При $\alpha > \pi$ в системе развивается неустойчивость Пирса, которая приводит к формированию виртуального катода и многопоточковому состоянию пучка (подробнее см. [29, 39]). Однако при $\alpha \sim 3\pi$ в диоде Пирса устанавливается однопоточковое состояние пучка, так что возможно описание системы в рамках гидродинамического приближения [29, 30, 33]. В работах [29–33, 36, 40] показано, что в этом случае наблюдаются различные типы пучково-плазменных хаотических колебаний.

Рассмотрим два связанных диода Пирса, которые в рамках гидродинамического приближения [29, 30, 33]. В работах [29–33, 36, 40] показано, что в этом случае наблюдаются различные типы пучково-плазменных хаотических колебаний.

Рассмотрим два связанных диода Пирса, которые в рамках гидродинамического приближения описываются самосогласованной системой уравнений движения, непрерывности и Пуассона от-

носительно безразмерных переменных (см. подробнее [29]):

$$\frac{\partial^2 \varphi_{1,2}}{\partial x^2} = \alpha_{1,2}^2 (\rho_{1,2} - 1), \quad (1)$$

$$\frac{\partial \rho_{1,2}}{\partial t} = -\frac{\partial (\rho_{1,2} v_{1,2})}{\partial x}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial v_{1,2}}{\partial t} = -v_{1,2} \frac{\partial v_{1,2}}{\partial x_{1,2}} - \frac{\partial \varphi_{1,2}}{\partial x}, \quad (3)$$

с граничными условиями

$$v_{1,2}(0, t) = 1, \quad \rho_{1,2}(0, t) = 1, \quad \varphi_{1,2}(0, t) = 0, \quad (4)$$

где индексы “1” и “2” относятся соответственно к первой и второй связанным пучково-плазменным системам.

В уравнениях (1)–(3) использованы безразмерные переменные потенциала φ , плотности ρ и скорости v электронной жидкости, пространственной координаты x и времени t , которые связаны с соответствующими размерными переменными соотношениями

$$\begin{aligned} \varphi' &= (v_0^2 / \eta) \varphi, \quad \rho' = \rho_0 \rho, \\ v' &= v_0 v, \quad x' = Lx, \quad t' = (L/v_0)t, \end{aligned} \quad (5)$$

где штрихом обозначены размерные величины, η – удельный заряд электрона, v_0 и ρ_0 – статические (невозмущенные) скорость и плотность электронной жидкости.

В работе рассматриваются случаи взаимной и однонаправленной связи между диодами Пирса. Так, двунаправленная связь между системами осуществляется с помощью изменения значения безразмерного потенциала на правых границах обеих связанных систем:

$$\begin{aligned} \varphi_{1,2}(x = 1.0, t) &= \\ &= \varepsilon \{ \rho_{1,2}(x = 1.0, t) - \rho_{1,2}(x = 1.0, t) \}. \end{aligned} \quad (6)$$

В случае однонаправленной связи граничные условия для потенциала задаются в следующем виде:

$$\begin{aligned} \varphi_1(1, t) &= 0 \\ \varphi_2(1, t) &= \varepsilon (\rho_1(x = 1, t) - \rho_2(x = 1, t)), \end{aligned} \quad (7)$$

где первая “1” (ведущая) система находится в режиме автономных колебаний, воздействуя на вторую “2” (ведомую) систему.

В нестационарных граничных условиях, описывающих двунаправленную (6) и однонаправленную (7) связь между системами, величина ε представляет собой коэффициент связи между системами, а величины $\rho_{1,2}(x = 1.0, t)$ есть колебания безразмерной плотности пространственного заряда, регистрируемые на выходе каждой из систем. В эксперименте это возможно реализовать

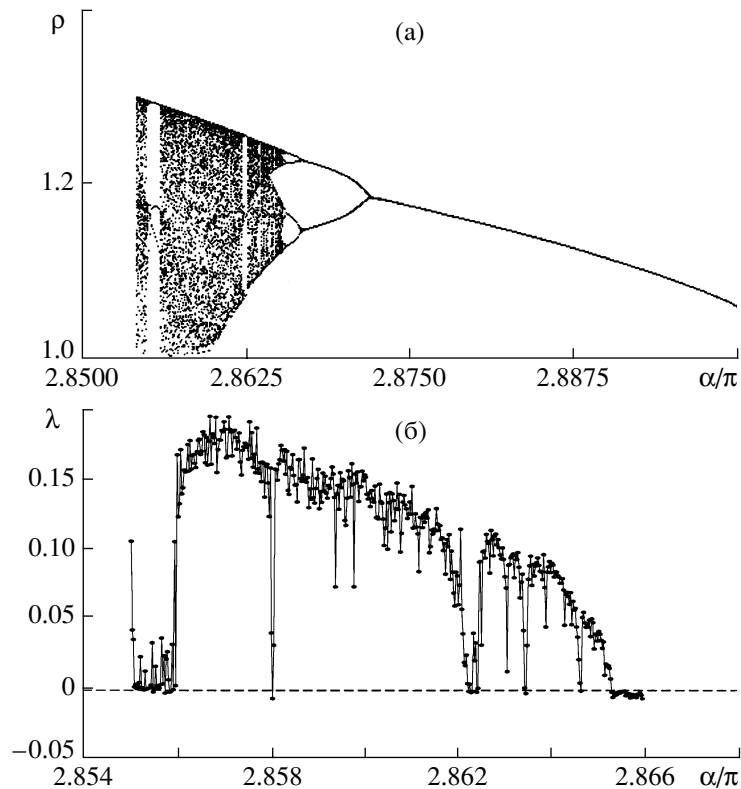


Рис. 1. Бифуркационная диаграмма (а) и зависимость максимальной ляпуновской экспоненты (б) колебаний в автономном диоде Пирса при изменении параметра α .

за счет размещения на выходе диодного промежутка, образованного сетками [37], прозрачными для электронного потока, отрезка спиральной замедляющей системы [41], который регистрирует колебания плотности пространственного заряда электронного пучка. Далее сигнал с выхода отрезка замедляющей системы первой системы подается на одну из сеток диодного промежутка второй из связанных систем, что приводит к модуляции разности потенциалов в пространстве взаимодействия. В этом случае параметр ε зависит от параметров замедляющей системы (сопротивление связи, длина системы и т.д.) и линии связи (волновое сопротивление, затухание и т.д.).

Система уравнений в частных производных (1)–(3) интегрировалась численно в конечно-разностном представлении [29, Лекция 4]. Уравнения непрерывности (2) и движения (3) решались с помощью схемы с разностями против потока, а уравнение Пуассона (1) – методом распространения вектора ошибки [42]. Основные параметры численной схемы, такие как шаг пространственной сетки Δx и шаг во времени Δt , были выбраны как $\Delta x = 0.005$ и $\Delta t = 0.003$.

Известно [29], что в автономной гидродинамической модели диода Пирса при уменьшении параметра α в этой области ($\alpha \in (2.850\pi, 2.870\pi)$) наблюдается переход к хаотической пространствен-

но-временной динамике пространственного заряда через каскад удвоений периода. Это иллюстрирует рис. 1, на котором показаны бифуркационная диаграмма колебаний плотности пространственного заряда в точке $x = 0.2$ пространства взаимодействия и зависимость величины старшего ляпуновского показателя от параметра Пирса. Величина старшего ляпуновского показателя λ рассчитывалась по алгоритму Бенетдина, адаптированному для анализа пространственно-распределенной системы (подробно методика расчета описана в нашей работе [43]). Из рис. 1 следует, что с уменьшением параметра Пирса α сложность колебаний, оцениваемая по размеру хаотического аттрактора (см. рис. 1а) и величине λ положительной ляпуновской экспоненты (см. рис. 1б) в среднем увеличивается.

2. ПОЛНАЯ СИНХРОНИЗАЦИЯ И СИНХРОНИЗАЦИЯ ВРЕМЕННЫХ МАСШТАБОВ ВО ВЗАИМНО СВЯЗАННЫХ ХАОТИЧЕСКИХ РАСПРЕДЕЛЕННЫХ СИСТЕМАХ

Исследуем динамику связанных диодов Пирса (1)–(3) со взаимной связью (6) при фиксированном значении параметра Пирса одной из систем $\alpha_1 = 2.861\pi$ и изменении управляющего параметра

α_2 второй системы в диапазоне $\alpha \in (2.850\pi, 2.870\pi)$, в котором, как было показано выше, в системе реализуется хаотическая динамика.

Численное моделирование показало, что при слабой расстройке хаотических систем $\Delta\alpha = \alpha_1 - \alpha_2$ наблюдается установление синхронизации временных масштабов, которая определяется путем анализа динамики разности фаз на различных временных масштабах s . Введение непрерывного множества фаз $\phi_s(t)$ хаотического сигнала на различных временных масштабах s осуществлялось с помощью непрерывного вейвлетного преобразования [12, 15–18]. В качестве анализируемых временных рядов рассматривались хаотические колебания плотности пространственного заряда $\rho_{1,2}(t)$ в точке пространства взаимодействия $x = 0.2$.

Суть хаотической синхронизации временных масштабов [12, 15–18] заключается в следующем. Рассмотрим вейвлетное преобразование некоторого хаотического сигнала $\xi(t)$

$$W(s, t_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \xi(t) \psi_{s, t_0}^*(t) dt, \quad (8)$$

где $\psi_{s, t_0}(t) = (1/\sqrt{s})\psi_0((t - t_0)/s)$ – вейвлетная функция, получающаяся из материнского вейвлета $\psi_0(t)$. Временной масштаб s определяет ширину вейвлета $\psi_{s, t_0}(t)$, t_0 – временной сдвиг вейвлетной функции вдоль оси времени (“*” означает комплексное сопряжение) [19]. Следует отметить, что при проведении вейвлетного преобразования понятие “временной масштаб”, как правило, используется вместо понятия “частота”, традиционного для фурье-преобразования.

В качестве материнского вейвлета, следуя [15, 16, 18], будем использовать Морлет-вейвлет $\psi_0(\eta) = (1/\sqrt{4\pi})\exp(j\omega_0\eta)\exp(-\eta^2/2)$ [19]. Выбор значения параметра вейвлета $\omega_0 = 2\pi$ обеспечивает соотношение $s = 1/f$ между временным масштабом s вейвлетного преобразования и частотой f преобразования Фурье.

Вейвлетный спектр сигнала $\xi(t)$

$$W(s, t_0) = |W(s, t_0)| \exp[j\phi_s(t_0)] \quad (9)$$

характеризует поведение системы на каждом временном масштабе s в любой момент времени t_0 . Величина $|W(s, t_0)|$ характеризует наличие и интенсивность соответствующего временного масштаба s в момент времени t_0 . Удобно также ввести интегральное распределение энергии вейвлетного спектра по временным масштабам

$$\langle E(s) \rangle = \int |W(s, t_0)|^2 dt_0. \quad (10)$$

В то же самое время, естественным образом оказывается определенной фаза $\phi_s(t) = \arg W(s, t)$ для

каждого временного масштаба s . Иными словами, оказывается возможным характеризовать поведение каждого временного масштаба s с помощью ассоциированной с ним фазы $\phi(t)$.

Если существует некоторый диапазон временных масштабов $[s_m; s_b]$, такой, что для любого временного масштаба $s \in [s_m; s_b]$ выполняется условие захвата фаз

$$|\phi_{s1}(t) - \phi_{s2}(t)| < \text{const} \quad (11)$$

и доля энергии вейвлетного спектра (10), приходящаяся на этот диапазон, отлична от нуля

$$E_{s_{nhr}} = \int_{s_m}^{s_b} \langle E(s) \rangle ds > 0, \quad (12)$$

то временные масштабы $s \in [s_m; s_b]$ являются синхронизованными, а хаотические генераторы находятся в режиме синхронизации временных масштабов [12, 15–18]. В соотношении (11) $\phi_{s1,2}(t)$ – непрерывные фазы первой и второй систем, соответствующие синхронизованным временным масштабам s .

Введение в рассмотрение непрерывного множества временных масштабов s с ассоциированными с ними фазами хаотического сигнала и выделение диапазона синхронных масштабов $\Delta s = s_2 - s_1$ позволяет ввести количественную характеристику меры хаотической синхронизации связанных систем, которая определяется как относительная доля энергии вейвлетного спектра, приходящаяся на синхронные временные масштабы:

$$\gamma = \int_{s_m}^{s_b} \langle E(s) \rangle ds / \int_0^{\infty} \langle E(s) \rangle ds, \quad (13)$$

где $\langle E(s) \rangle$ – интегральное распределение энергии вейвлетного спектра по масштабам, определяемое формулой (10). Значение величины $\gamma = 0$ свидетельствует об отсутствии режима хаотической синхронизации связанных подсистем. Величина $\gamma \neq 0$ показывает, что в системе реализуется режим синхронизации временных масштабов, для которых выполняются условия (11) и (12). Значение $\gamma = 1$ показывает, что колебания в каждой из подсистем близки друг к другу. Такой режим называется режимом полной синхронизации. Рост γ от 0 до 1 свидетельствует об увеличении доли энергии, приходящейся на синхронные временные масштабы s .

Вернемся к обсуждению взаимных колебаний в системе гидродинамических моделей диодов Пирса.

Поведение связанных пучково-плазменных систем иллюстрирует рис. 2а, построенный при $\alpha_1 = 2.861\pi$ и $\alpha_2 = 2.860\pi$, на котором показано изменение диапазона синхронных масштабов s_m и s_b

при увеличении параметра связи ϵ . Из рис. 2а видно, что при $\epsilon > 0.0007$ в системе появляются временные масштабы, на которых динамика пучково-плазменных колебаний синхронна. Данный режим, как уже обсуждалось выше, соответствует режиму синхронизации временных масштабов хаотических колебаний. С ростом параметра связи ϵ диапазон синхронных масштабов увеличивается, и при $\epsilon \approx 0.08 \dots 0.1$ динамика системы практически во всем диапазоне временных масштабов становится синхронной – в связанных пучково-плазменных системах возникает режим, близкий к синхронизации с запаздыванием со сдвигом колебаний между состояниями систем во времени $\tau \approx 0.07$. Далее, с ростом параметра связи ϵ сдвиг во времени между колебаниями уменьшается, и связанная система стремится к режиму полной хаотической синхронизации, характеризуемой близкой к идентичной динамикой каждой из связанных систем во времени ($\tau \approx 0$).

При большей расстройке параметров $\Delta\alpha$ связанных пучково-плазменных систем, когда спектральный состав колебаний в электроном пучке существенно сложнее, наступление синхронизации временных масштабов наблюдается при больших значениях коэффициента связи. На рис. 2а для случая $\alpha_1 = 2.860\pi$ и $\alpha_2 = 2.858\pi$ показаны соответствующие границы $[s_m, s_b]$ области синхронных масштабов. Как и выше, с ростом ϵ возникает диапазон синхронных временных масштабов и система стремится к режиму порлной хаотической синхронизации, однако это происходит при значительно больших значениях параметров связи, чем в случае малой расстройки. Для анализа степени близости колебаний в каждой из распределенных систем была рассчитана зависимость меры идентичности Δ пространственно-временных хаотических колебаний систем от ϵ , которая определяется как [44]

$$\Delta = \langle |\rho_1(x, t) - \rho_2(x, t)| + |v_1(x, t) - v_2(x, t)| + |\phi_1(x, t) - \phi_2(x, t)| \rangle, \quad (14)$$

где $\langle \dots \rangle$ означает усреднение по времени и пространству. Результаты показаны на рис. 2б, из которого видно, что функция $\Delta(\epsilon)$ быстро спадает с ростом связи, стремясь к нулю. Из рис. 2б (кружочки) видно, что величина Δ при большой расстройке по параметру пучково-плазменных систем остается не равной нулю (хотя и становится достаточно малой при $\epsilon > 0.17$) в отличие от случая слбой расстройки (рис. 2б (квадратики)). Режимы колебаний, для которых $\Delta(\epsilon) \approx 0$, являются режимами полной хаотической синхронизации.

Как уже отмечалось, важной энергетической характеристикой синхронного поведения связанных хаотических систем является мера синхронизации (13), определяемая как доля энергии γ вейвлетного спектра, приходящаяся на синхронные временные масштабы. На рис. 2б показаны зависимости $\gamma(\epsilon)$ для двух рассмотренных выше наборов значений управляющих параметров $\alpha_{1,2}$. Видно, что с ростом параметра связи наблюдается увеличение доли энергии хаотических пространственно-временных колебаний, приходящейся на синхронизованные масштабы, что соответствует сближению колебаний в каждой из распределенных систем и установлению в итоге (при больших величинах параметра связи) режима полной хаотической синхронизации.

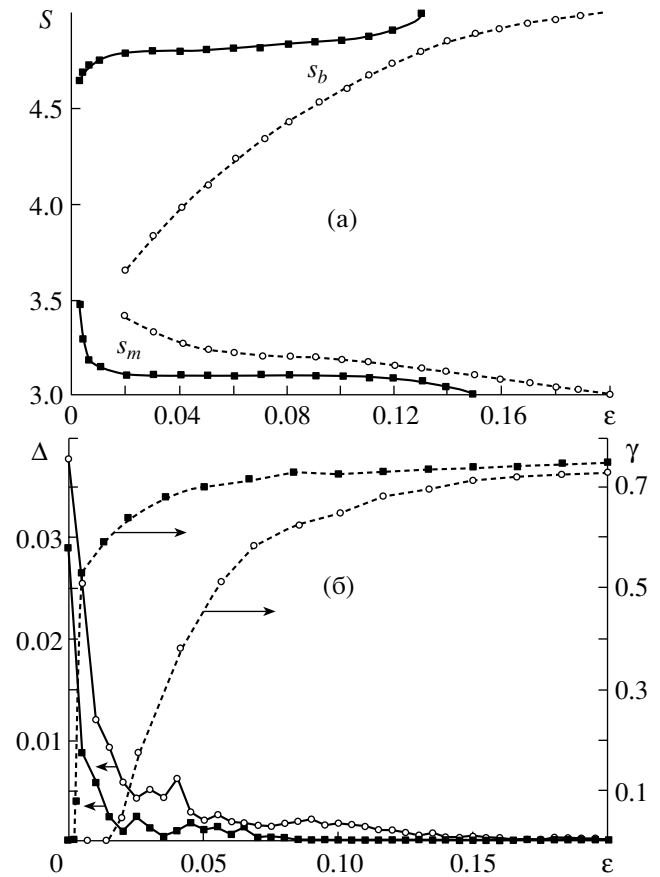


Рис. 2. Зависимости нижней s_m и верхней s_b границ области синхронизированных масштабов (а) и зависимости меры идентичности Δ хаотических пространственно-временных колебаний и величины γ относительной энергии, приходящейся на синхронные масштабы (б), от величины параметра связи ϵ для малой $\alpha_1/\pi = 2.860$, $\alpha_2/\pi = 2.861$ (квадратики) и большой $\alpha_1/\pi = 2.860$, $\alpha_2/\pi = 2.858$ (кружочки) расстройки параметров.

зации (13), определяемая как доля энергии γ вейвлетного спектра, приходящаяся на синхронные временные масштабы. На рис. 2б показаны зависимости $\gamma(\epsilon)$ для двух рассмотренных выше наборов значений управляющих параметров $\alpha_{1,2}$. Видно, что с ростом параметра связи наблюдается увеличение доли энергии хаотических пространственно-временных колебаний, приходящейся на синхронизованные масштабы, что соответствует сближению колебаний в каждой из распределенных систем и установлению в итоге (при больших величинах параметра связи) режима полной хаотической синхронизации.

На рис. 3 на плоскости управляющих параметров (α_2, ϵ) показана граница области полной хаотической синхронизации в системе двунаправленно связанных диодов Пирса, построенная при фиксированном значении параметра Пирса $\alpha_1 = 2.861\pi$. Из рисунка видно, что с ростом параметра

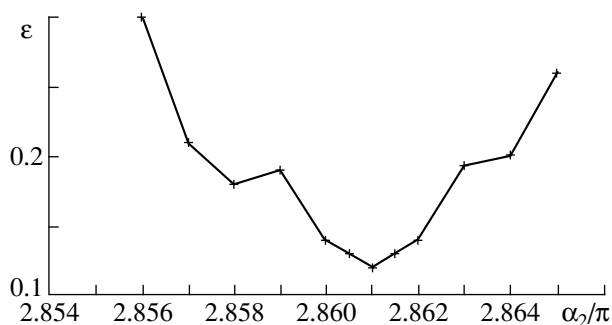


Рис. 3. Плоскость управляющих параметров (α_2/π , ϵ) при значении $\alpha_1 = 2.861\pi$. Линией показана граница возникновения режима полной хаотической синхронизации связанных распределенных пучково-плазменных систем.

ра связи при любых расстройках управляющих параметров $\alpha_{1,2}$ каждого из диодов Пирса в связанной системе наблюдается режим полной синхронизации. Это относится как к слабо хаотическим колебаниям и малой расстройке параметров, так и развитому хаосу даже при значительном отличии управляющих параметров в каждой из подсистем. Минимальные значения параметров связи ϵ , при которых наблюдается установление полной синхронизации враспределенных пучково-плазменных системах, имеют место при малой расстройке связанных подсистем.

3. ОБОБЩЕННАЯ СИНХРОНИЗАЦИЯ В ОДНОНАПРАВЛЕННО СВЯЗАННЫХ ДИОДАХ ПИРСА

Рассмотрим теперь явление обобщенной синхронизации в исследуемых связанных системах. Обобщенная синхронизация вводится только для однонаправленно связанных систем, поэтому рассмотрим однонаправленную связь (7) между распределенными пучково-плазменными системами со сверхкритическим током, находящихся в режиме хаотических колебаний.

Для диагностики режима обобщенной синхронизации нами использовался метод вспомогательной системы [9] и расчет максимальной условной ляпуновской экспоненты [8, 45]. Суть метода вспомогательной системы сводится к следующему: наряду с ведомой системой $\vec{x}_r(t)$ рассматривается идентичная ей вспомогательная система $\vec{x}_a(t)$. Начальные условия для вспомогательной системы $\vec{x}_a(t_0)$ выбираются отличными от начального состояния ведомой системы $\vec{x}_r(t_0)$. В случае отсутствия режима обобщенной синхронизации между взаимодействующими системами вектора состояния ведомой $\vec{x}_r(t)$ и вспомогательной $\vec{x}_a(t)$

систем принадлежат одному и тому же хаотическому аттрактору, но являются различными. В том случае, когда имеет место режим обобщенной синхронизации, в силу выполнения соотношений $\vec{x}_r(t) = \vec{F}[\vec{x}_d(t)]$ и, соответственно, $\vec{x}_a(t) = \vec{F}[\vec{x}_d(t)]$, после завершения переходного процесса состояния ведомой и вспомогательной систем должны стать идентичными $\vec{x}_r(t) \equiv \vec{x}_a(t)$. Таким образом, эквивалентность состояний ведомой и вспомогательной систем после переходного процесса (который может быть достаточно длительным [46]) является критерием наличия обобщенной синхронизации между ведущим и ведомым осцилляторами.

Анализ режима обобщенной синхронизации может быть проведен также с помощью вычисления условных ляпуновских экспонент. В этом случае рассчитываются ляпуновские экспоненты для неавтономной ведомой системы, а так как ее поведение зависит от поведения ведущей системы, то эти ляпуновские экспоненты отличаются от ляпуновских экспонент автономной ведомой системы и называются условными. Критерием существования обобщенной синхронизации в однонаправленно связанных динамических системах является отрицательность старшего условного ляпуновского показателя λ [8, 45].

Для диагностики обобщенной хаотической синхронизации в системе однонаправленно связанных диодов Пирса при использовании метода вспомогательной системы решалась система уравнений (1)–(3) при значениях параметра Пирса во вспомогательной системе, равных значениям управляющего параметра в ведомой системе, но при других начальных условиях. При этом для анализа возникновения режима обобщенной синхронизации удобно построить разность колебаний $|\rho_2(x, t) - \rho_a(x, t)|$ в ведомой ($\rho_2(x, t)$) и вспомогательной ($\rho_a(x, t)$) системах во всем пространстве взаимодействия. Полученные результаты представлены на рис. 4, из которого видно, что при малых значениях параметра связи колебания плотности заряда в ведомой и вспомогательной системах остаются различными по всему пространству взаимодействия (рис. 4а), а при достаточно больших значениях ϵ колебания в ведомой и вспомогательной системах становятся идентичными (рис. 4б), т.е. в связанной системе возникает режим обобщенной синхронизации.

Результаты, полученные методом вспомогательной системы были подтверждены с помощью расчета старшего условного ляпуновского показателя λ . Численный расчет старшего условного ляпуновского показателя, как и выше, осуществлялся методом Бенеттина, адаптированным для анализа распределенной системы (см. подробнее [43]). На рис. 5 приводится соответствующая ха-

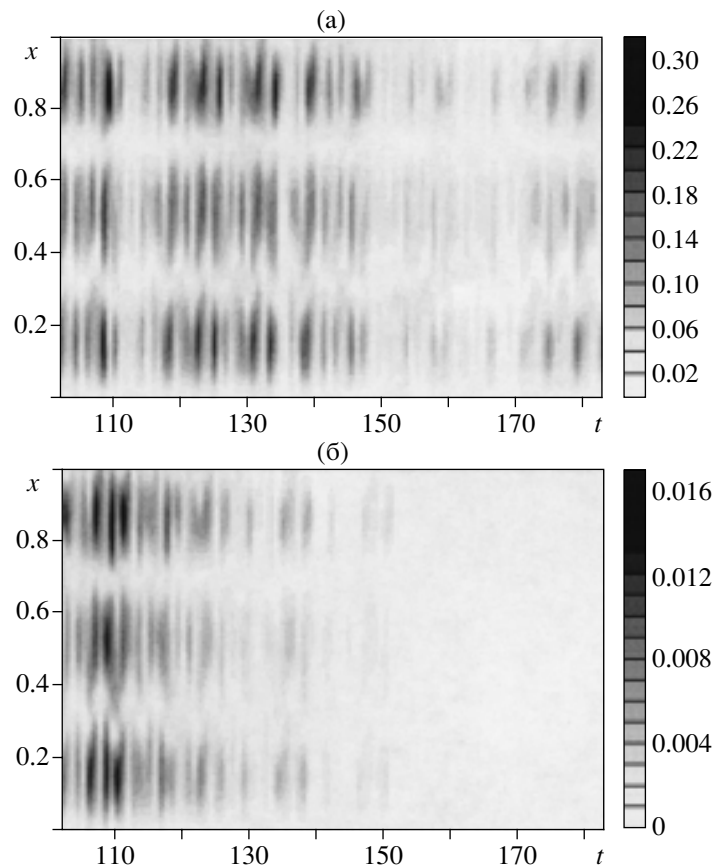


Рис. 4. Пространственно-временная эволюция разности состояний (величин плотности пространственного заряда) ведомой и вспомогательной пучково-плазменных систем $|\rho_2(x, t) - \rho_a(x, t)|$: а: $\epsilon = 0.05$, отсутствие режима обобщенной хаотической синхронизации; б: $\epsilon = 0.2$, режим обобщенной хаотической синхронизации: после переходного процесса в ведомой и вспомогательной системах устанавливаются одинаковые пространственно-временные состояния.

рактерная зависимость старшего условного ляпуновского показателя от величины параметра связи, при значениях параметров $\alpha_1 = 2.858\pi$ и $\alpha_2 = 2.862\pi$. Можно видеть, что при определенной величине параметра связи $\epsilon = \epsilon_{GS}$ (отмечен стрелкой на рис. 5) в распределенной пучково-плазменной системе устанавливается режим обобщенной хаотической синхронизации, который характеризуется тем, что значение старшей условной ляпуновской экспоненты становится меньше нуля.

Зафиксировав управляющий параметр одной из систем и меняя параметр другой можно построить зависимость порога возникновения режима обобщенной синхронизации ϵ_{GS} от величины расстройки между системами. На рис. 6а данная зависимость построена для фиксированного значения параметра ведущей системы; видно, что с увеличением параметра ведомой системы (с переходом ведомой системы в область более простых колебаний; см. рис. 1, из которого видно, что с увеличением параметра α в системе наблюдается уменьшение максимальной ляпуновской экспоненты, а также имеет место переход от хаотиче-

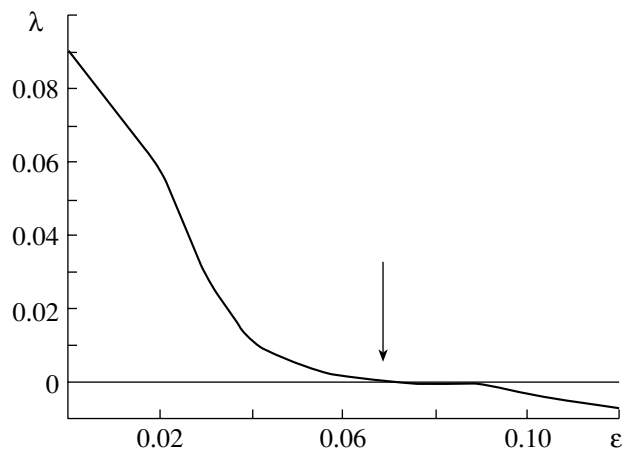


Рис. 5. Зависимость максимальной условной ляпуновской экспоненты от параметра связи ϵ для значений параметров Пирса ведомой и ведущей систем: $\alpha_1 = 2.858\pi$ и $\alpha_2 = 2.862\pi$. Стрелкой отмечено значение параметра связи, при котором в системе устанавливается режим обобщенной синхронизации (максимальная условная ляпуновская экспонента становится меньше 0).

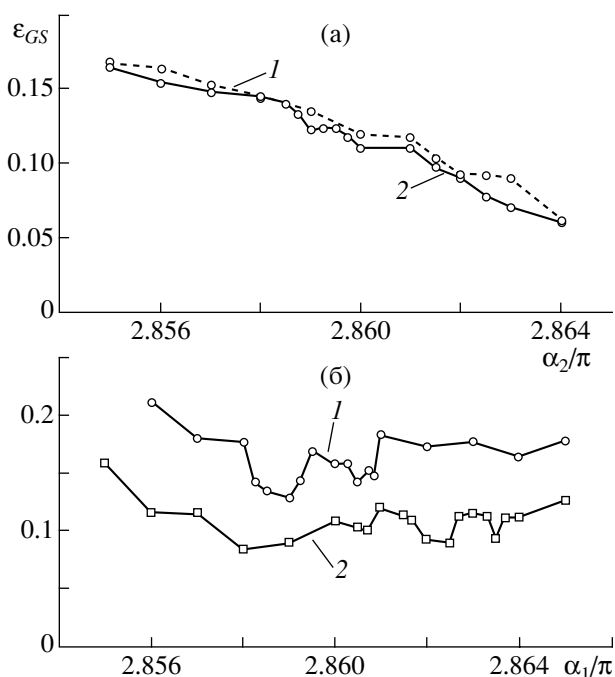


Рис. 6. Зависимость порога возникновения обобщенной хаотической синхронизации от параметра ведущей α_2 (а) и ведомой α_1 (б) распределенной систем (для фиксированных значений параметра α : 1 – 2.859 π , 2 – 2.862 π).

ской динамики через каскад удвоений периода к регулярным колебаниям) порог возникновения обобщенной синхронизации снижается.

На рис. 6б величина порога ε_{GS} обобщенной синхронизации построена при фиксированном значении управляющего параметра α_2 ведомой системы при изменении параметра α_1 ведущей системы. Можно видеть что при малых расстройках между ведущей и ведомой системами величинами порога режима обобщенной синхронизации слабо зависит от параметров ведущей системы. Таким образом, в распределенной пучково-плазменной системе с увеличением параметра связи наблюдается установление режима обобщенной синхронизации.

В нашей работе [47] при помощи предложенного метода модифицированной системы были выявлены различные механизмы установления режимов обобщенной синхронизации в системах с малым числом степеней свободы. Суть метода состоит в замене системы двух однонаправленных связанных хаотических осцилляторов модифицированной ведомой системой под внешним воздействием, в качестве которого выступает сигнал ведущей системы. Этот метод помог выявить механизмы установления режима обобщенной синхронизации в однонаправленно связанных хаотических осцилляторах, которые обусловлены наличием дополнительной диссипации в неавто-

номной хаотической системе, находящейся в режиме обобщенной хаотической синхронизации [47].

Применим метод модифицированной системы к анализу механизма возникновения обобщенной синхронизации в связанных распределенных пучково-плазменных системах. Для этого, следуя работе [47], необходимо рассмотреть динамику автономной модифицированной ведомой системы с учетом введения в систему однонаправленной связи. В нашем случае автономная модифицированная распределенная система будет описываться системой уравнений (1)–(3) при следующих граничных условиях для потенциала:

$$\begin{aligned} \varphi_m(0, t) &= 0, \\ \varphi_m(1, t) &= -\varepsilon \rho_m(1, t). \end{aligned} \quad (15)$$

В таком виде модифицированная распределенная система (1)–(3) может рассматриваться как гидродинамическая модель диода Пирса с подключенной к нему цепью обратной связи. Подобная система была достаточно подробно исследована в наших работах [35, 36], где рассматривалась гидродинамическая модель диода Пирса с внешней обратной связью. Для нее было показано, что с увеличением коэффициента обратной связи (параметра ε в рассматриваемом случае) в гидродинамической модели диода Пирса с обратной связью наблюдается переход от хаотической динамики к периодическим колебаниям через каскад бифуркаций удвоения периода.

Как было показано в работе [47], необходимым условием возникновения режима обобщенной синхронизации является возможность установления в модифицированной системе с ростом параметра связи ε регулярных колебаний или стационарных состояний. Поэтому, учитывая результаты работы [35, 36], можно утверждать, что при рассмотрении обобщенной синхронизации хаотических колебаний в гидродинамической модели диода Пирса также реализуется обнаруженный в работе [47] механизм установления обобщенной синхронизации, однако в исследуемом случае он определяется не введением в систему дополнительной диссипации, а перестройкой режимов колебаний в модифицированной системе за счет подключения некоторой обратной связи.

Это иллюстрирует рис. 7а, на котором показана бифуркационная диаграмма колебаний плотности пространственного заряда в диоде Пирса с обратной связью (регистрируемая в точке пространства системы $x = 0.2$), при изменении параметра ε . Из бифуркационной диаграммы видно, что с увеличением параметра связи колебания в модифицированной системе становятся периодическими и далее наблюдается установление стационарного состояния. Однако значение параметра связи, при котором в системе имеет место установление периодических колебаний, суще-

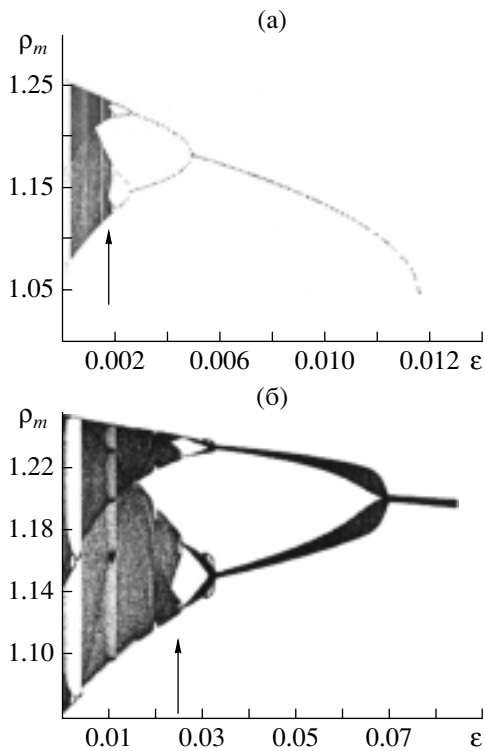


Рис. 7. Бифуркационные диаграммы колебаний плотности пространственного заряда в модифицированной системе в случае автономной динамики (а) и под внешним гармоническим воздействием (б). Параметр Пирса модифицированной системы $\alpha_m = 2.862\pi$.

ственно меньше порогового значения ϵ_{GS} , при котором возникает режим обобщенной синхронизации. Это определяется тем, что для нахождения порога обобщенной синхронизации необходимо рассматривать модифицированную систему под внешним воздействием, как это обсуждалось в работе [47]. В этом случае внешнее воздействие приводит к увеличению значения параметра ϵ , при котором имеет место возникновение периодических колебаний. Подобное поведение можно проиллюстрировать рассмотрением динамики модифицированной системы под внешним периодическим воздействием. В простейшем случае такое внешнее воздействие можно задать гармоническим, частота и амплитуда которого должна соответствовать основной базовой частоте в спектре мощности ведущей хаотической системы.

В этом случае мы изменяем граничные условия (15) для модифицированной системы (1)–(3), добавляя в них внешних гармонических сигнал:

$$\begin{aligned} \varphi_m(0, t) &= 0, \\ \varphi_m(1, t) &= -\epsilon \rho_r(1, t) + \epsilon A \cos(2\pi f_0 t), \end{aligned} \quad (16)$$

где $A = 0.8$ и $f_0 = 1.0$ выбраны таким образом, чтобы моделировать основной пик в спектре мощности вещущей системы.

На рис. 7б показана бифуркационная диаграмма колебаний в диоде Пирса для данного случая. Видно, что бифуркационные точки для модифицированной системы с внешним воздействием сдвигаются в сторону больших значений ϵ , относительно автономного случая (рис. 7а), одновременно в системе при больших значениях коэффициента обратной связи ϵ наблюдаются не периодические, а двухчастотные колебания с несоизмеримыми временными масштабами (квазипериодические регулярные колебания), что хорошо видно из бифуркационной диаграммы. Поэтому значение параметра, при котором возникает обобщенная синхронизация, принимает большие значения по сравнению со значением параметра ϵ , при котором в автономной модифицированной системе наблюдается переход от хаотических колебаний к периодической динамике.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, в работе впервые показано, что в системе взаимно связанных пучково-плазменных систем со сверхкритическим током (связанных гидродинамических моделях диода Пирса) возможно установление различных типов хаотической синхронизации (полная синхронизация и синхронизация временных масштабов). Для анализа хаотической синхронизации был применен новый подход к хаотической синхронизации – синхронизация временных масштабов [16–18]. Особо отметим возможность установления режима полной синхронизации хаотических пространственно-временных пучково-плазменных колебаний, что делает возможным применение подобных автоколебательных сред в системах передачи информации в СВЧ-диапазоне [26].

При однонаправленной связи с увеличением параметра связи наблюдается переход от асинхронного поведения к режиму обобщенной синхронизации. При фиксированном управляющем параметре (параметре Пирса) ведущей системы порог обобщенной синхронизации снижается с ростом параметра Пирса ведомой системы. При неизменном значении параметра Пирса ведомой системы значение параметра связи, при котором наблюдается установление режима обобщенной синхронизации, слабо зависит от изменения параметра Пирса ведомой системы. Подобное поведение порога возникновения обобщенной синхронизации было объяснено с помощью метода модифицированной системы, предложенного для анализа обобщенной синхронизации сосредоточенных систем в работе [47].

Работа выполнена при поддержке Американского фонда гражданский исследований и развития (CRDF, (грант REC-006) и Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 05-02-16286 и № 06-02-81013). Авторы также благо-

дарят за финансовую поддержку ФНП “Династия” и МЦФФМ.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Voccaletti S., Kuths J., Osipov G. et al.* // Phys. Rep. 2002. V. 366. P. 1.
2. *Пиковский А., Розенблюм М., Куртс Ю.* Синхронизация. Фундаментальное нелинейное явление. М.: Техносфера, 2003.
3. *Анищенко В.С., Астахов В.В., Вадивасова Т.Е. и др.* Нелинейные эффекты в хаотических и стохастических системах. М.; Ижевск: Ин-т компьютерных исследований, 2003.
4. *Kiss I.Z., Hudson J.L., Escalona J., Parmananda P.* // Phys. Rev. E. 2004. V. 70. № 2. P. 026210.
5. *Glass L.* // Nature (London). 2001. V. 410. P. 277.
6. *Mosekilde E., Maistrenko Yu., Postnov D.* Chaotic synchronization, applications to living systems. Ser. A. V. 42. Singapore: World Scientific, 2002.
7. *Rosenblum M.G., Pikovsky A.S., Kurths J.* // Phys. Rev. Lett. 1996. V. 76. № 11. P. 1804.
8. *Pyragas K.* // Phys. Rev. E. 1996. V. 54. № 5. P. R4508.
9. *Abarbanel H.D.I., Rulkov N.F., Sushchik M.M.* // Phys. Rev. E. 1996. V. 53. № 5. P. 4528.
10. *Rosenblum M.G., Pikovsky A.S., Kurths J.* // Phys. Rev. 1997. V. 78. № 22. P. 4193.
11. *Pikovsky A., Rosenblum M., Kurths J.* // Int. J. Bifurcation and Chaos. 2000. V. 10. № 10. P. 2291.
12. *Hramov A.E., Koronovskii A.A., Kurovskaya M.K., Moskalenko O.I.* // Phys. Rev. E. 2005. V. 71. № 5. P. 056204.
13. *Rulkov N.F., Sushchik M.M., Tsimring L.S., Abarbanel H.D.I.* // Phys. Rev. E. 1995. V. 51. № 2. P. 980.
14. *Pecora L.M., Carroll T.L., Jonson G.A., Mar D.J.* // Chaos. 1997. V. 7. № 4. P. 520.
15. *Короновский А.А., Храмов А.Е.* // Письма в ЖЭТФ. 2004. Т. 79. № 7. С. 391.
16. *Hramov A.E., Koronovskii A.A.* // Chaos. 2004. V. 14. № 3. P. 603.
17. *Hramov A.E., Koronovskii A.A.* // Physica D. 2005. V. 206. № 3–4. P. 252.
18. *Hramov A.E., Koronovskii A.A., Levin Yu.I.* // ЖЭТФ. 2005. V. 127. № 4. P. 886.
19. *Короновский А.А., Храмов А.Е.* Непрерывный вейвлетный анализ и его приложения. М.: Физматлит, 2003.
20. *Короновский А.А., Москаленко О.И., Храмов А.Е.* // Письма в ЖЭТФ. 2004. Т. 80. № 1. С. 25.
21. *Афраймович В.С., Некоркин В.И., Осипов Г.В., Шалфеев В.Д.* Устойчивость, структуры и хаос в нелинейных сетях синхронизации. Горький: ИПФ АН СССР, 1989.
22. *Kocarev L., Tasev Z., Stojanovski T., Parlitz U.* // Chaos. 1997. V. 7. № 4. P. 635.
23. *Voccaletti S., Bragard J., Arecchi F.T., Mancini H.* // Phys. Rev. Lett. 1999. V. 83. № 3. P. 536.
24. *Tasev Z., Kocarev L., Junge L., Parlitz U.* // Int. J. Bifurcation and Chaos. 2000. V. 10. № 11. P. 2551.
26. *Дмитриев А.С., Панас А.И.* Динамический хаос: новые носители информации для систем связи. М.: Физматлит, 2002.
27. *Hramov A.E., Koronovskii A.A., Popov P.V., Rempen I.S.* // Chaos. 2005. V. 15. № 1. P. 013705.
28. *Короновский А.А., Попов П.В., Храмов А.Е.* // ЖТФ. 2005. Т. 75. № 4. С. 1.
29. *Трубецков Д.И., Храмов А.Е.* Лекции по сверхвысокочастотной электронике для физиков. М.: Физматлит, 2003. Т. 1.
30. *Godfrey B.B.* // Phys. Fluids. 1987. V. 30. P. 1553.
31. *Kuhn S., Ender A.* // J. Appl. Phys. 1990. V. 68. P. 732.
32. *Анфиногентов В.Г., Трубецков Д.И.* // РЭ. 1992. Т. 37. № 12. С. 2251.
33. *Matsumoto H., Yokoyama H., Summers D.* // Phys. Plasmas. 1996. V. 3. № 1. P. 177.
34. *Klinger T., Schroder C., Block D. et al.* // Phys. Plasmas. 2001. V. 8. № 5. P. 1961.
35. *Храмов А.Е., Ремпен И.С.* // РЭ. 2002. Т. 47. № 6. С. 732.
36. *Hramov A.E., Rempen I.S.* // Int. J. Electronics. 2004. V. 91. № 1. P. 11.
37. *Калинин Ю.А., Короновский А.А., Храмов А.Е. и др.* // Физика плазмы. 2005. Т. 31. № 11. С. 1009.
38. *Кузелев М.В., Рухадзе А.А.* Электродинамика плотных электронных пучков в плазме. М.: Наука, 1990.
39. *Кузелев М.В., Рухадзе А.А., Стрелков П.С.* Плазменная релятивистская СВЧ-электроника. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2002.
40. *Pierce J.* // J. Appl. Phys. 1994. V. 15. P. 721.
41. *Калинин Ю.А., Есин А.Д.* Методы и средства физического эксперимента в вакуумной СВЧ электронике. Саратов: Изд-во СГУ, 1991.
42. *Роуч П.* Вычислительная гидродинамика. М.: Мир, 1980.
43. *Короновский А.А., Ремпен И.С., Храмов А.Е.* // Изв. РАН. Сер. физ. 2003. Т. 67. № 12. С. 1708.
44. *Bragaed J., Arecchi F.T., Voccaletti S.* // Int. J. Bifurcation and Chaos. 2000. V. 10. P. 2381.
45. *Pecora L.M., Carroll T.L.* // Phys. Rev. A. 1991. V. 44. № 4. P. 2374.
46. *Hramov A.E., Koronovskii A.A.* // Europhysics Lett. 2005. V. 70. № 2. P. 169.
47. *Hramov A.E., Koronovskii A.A.* // Phys. Rev. 2005. V. 71. № 6. P. 067201.