

ГРАНИЦА ВОЗНИКНОВЕНИЯ РЕЖИМА ОБОБЩЕННОЙ СИНХРОНИЗАЦИИ ХАОТИЧЕСКИХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ

© 2007 г. А. А. Короновский, О. И. Москаленко, А. Е. Храмов

Поступила в редакцию 31.03.2006 г.

Рассмотрено поведение двух однонаправленно связанных хаотических осцилляторов вблизи границы возникновения режима обобщенной хаотической синхронизации. С помощью метода модифицированной системы объяснены физические механизмы, приводящие к ее установлению как при больших, так и при малых расстройках взаимодействующих систем.

ВВЕДЕНИЕ

Хаотическая синхронизация является одним из фундаментальных нелинейных явлений, активно изучаемых в последнее время [1] и имеющих важное прикладное значение. С развитием теории динамического хаоса было выявлено достаточно большое число различных типов хаотического синхронного поведения связанных динамических систем с потоковым временем [2–9]: фазовая синхронизация, обобщенная синхронизация, синхронизация с запаздыванием (лаг синхронизация), полная синхронизация, синхронизация временных масштабов. Каждый из этих типов синхронной хаотической динамики имеет свои особенности и свои способы диагностики, при этом в научной литературе активно обсуждается вопрос о взаимосвязи этих типов синхронного поведения друг с другом. Различные типы синхронизации связанных хаотических осцилляторов могут рассматриваться как различные виды проявления единых закономерностей, возникающих в связанных нелинейных системах (см., например, [8–12]).

Одним из вопросов, вызывающих большой интерес, является проблема взаимосвязи различных видов синхронного поведения связанных хаотических осцилляторов, в частности, взаимосвязи режимов обобщенной и фазовой синхронизаций. Изначально считалось [13], что режим фазовой синхронизации является более слабым типом хаотического поведения, т.е., в том случае, когда однонаправленно связанные хаотические осцилляторы демонстрируют режим обобщенной синхронизации, всегда будет наблюдаться также режим фазовой синхронизации, в то время как фазовая синхронизация может наблюдаться и без обобщенной.

Затем, однако, было показано [14], что в некоторых случаях режим фазовой синхронизации может возникать при меньших значениях параметра связи между осцилляторами, чем режим

обобщенной синхронизации (т.е. существуют такие области на плоскости управляющих параметров, в которых режим обобщенной синхронизации реализуется, а фазовой – нет), в зависимости от расстройки управляющих параметров связанных хаотических осцилляторов¹. В частности, для связанных систем Ресслера, рассмотренных в работе [14], было найдено, что при малых расстройках хаотических осцилляторов (в том числе и при нулевой расстройке, соответствующей случаю идентичных осцилляторов), значение параметра связи, при котором возникает режим обобщенной синхронизации, примерно в два раза больше, чем при больших значениях расстройки управляющих параметров (см. также [16]). Для всех других известных типов хаотической синхронизации (фазовая, синхронизация с запаздыванием и полная синхронизация, синхронизация временных масштабов) зависимость порога возникновения синхронного режима от параметра расстройки ведет себя диаметрально противоположным образом: по мере уменьшения величины расстройки управляющих параметров систем, значение параметра связи, при котором устанавливается соответствующий синхронный режим, уменьшается. Таким образом, в этом аспекте режим обобщенной синхронизации “выделяется” из общей группы типов хаотической синхронизации. Более того, подобная особенность является противоречащей кажущемуся очевидным на первый взгляд положению о том, что чем меньше расстроены системы, тем легче они должны синхронизоваться, и, соответственно, синхронный режим должен устанавливаться при меньшем значении параметра связи.

Целью настоящей работы является выявление механизмов, приводящих к установлению режима обобщенной синхронизации в однонаправленно связанных хаотических осцилляторах.

¹ Механизмы, обуславливающие подобное поведение связанных осцилляторов, были описаны в работах [9, 15].

1. ОБОБЩЕННАЯ синхронизация И МЕТОД МОДИФИЦИРОВАННОЙ СИСТЕМЫ

Режим обобщенной синхронизации [3] означает, что между состояниями взаимодействующих однонаправленно связанных ведущего $\dot{\vec{x}}_d(t)$ и ведомого $\dot{\vec{x}}_r(t)$ хаотических осцилляторов (1)

$$\begin{aligned} \dot{\vec{x}}_d(t) &= \mathbf{G}(\dot{\vec{x}}_d(t)), \\ \dot{\vec{x}}_r(t) &= \mathbf{H}(\dot{\vec{x}}_r(t)) + \varepsilon \mathbf{A}(\dot{\vec{x}}_d(t) - \dot{\vec{x}}_r(t)), \end{aligned} \quad (1)$$

где \mathbf{G} и \mathbf{H} – операторы эволюции взаимодействующих осцилляторов, $\mathbf{A} = \{\delta_{ij}\}$ – матрица связи, ε – параметр связи, $\delta_{ii} = 0$ или 1, $\delta_{ij} = 0$ ($i \neq j$), существует некоторая функциональная зависимость $\dot{\vec{F}}[\cdot]$, такая, что после завершения переходного процесса имеет место установление функционального соотношения $\dot{\vec{x}}_r(t) = \dot{\vec{F}}[\dot{\vec{x}}_d(t)]$. При этом сам вид данной зависимости $\dot{\vec{F}}[\cdot]$ может быть достаточно сложным, а процедура ее нахождения весьма нетривиальной. В зависимости от вида функциональной зависимости $\dot{\vec{F}}[\cdot]$ – гладкой или фрактальной – выделяют соответственно сильную и слабую обобщенную синхронизацию [17]. Следует отметить, что в качестве взаимодействующих осцилляторов могут выступать две разные динамические системы, в том числе и с различной размерностью фазового пространства. Явление обобщенной синхронизации описано также для распределенных систем различной природы [18, 19].

В литературе предложено несколько методов для диагностирования режима обобщенной синхронизации между хаотическими осцилляторами, такие как метод ближайших соседей [3, 20] или часто используемый метод вспомогательной системы [21]. Суть метода вспомогательной системы сводится к следующему: наряду с ведомой системой $\dot{\vec{x}}_r(t)$ рассматривается идентичная ей вспомогательная система $\dot{\vec{x}}_a(t)$. Начальные условия для вспомогательной системы $\dot{\vec{x}}_a(t_0)$ выбираются отличными от начального состояния ведомой системы $\dot{\vec{x}}_r(t_0)$, однако лежащими в бассейне притяжения того же аттрактора. В случае отсутствия режима обобщенной синхронизации между взаимодействующими системами вектора состояния ведомой $\dot{\vec{x}}_r(t)$ и вспомогательной $\dot{\vec{x}}_a(t)$ систем принадлежат одному и тому же хаотическому аттрактору, но являются различными. В том случае, когда имеет место режим обобщенной синхронизации, в силу выполнения соотношений $\dot{\vec{x}}_r(t) =$

$\dot{\vec{F}}[\dot{\vec{x}}_d(t)]$ и, соответственно, $\dot{\vec{x}}_a(t) = \dot{\vec{F}}[\dot{\vec{x}}_d(t)]$, после завершения переходного процесса состояния ведомой и вспомогательной систем должны стать идентичными $\dot{\vec{x}}_r(t) \equiv \dot{\vec{x}}_a(t)$ (более подробно см. [21]). Таким образом, эквивалентность состояний ведомой и вспомогательной систем после переходного процесса (который может быть достаточно длительным [22]) является критерием наличия обобщенной синхронизации между ведущим и ведомым осцилляторами.

Анализ режима обобщенной синхронизации может быть проведен также с помощью вычисления условных ляпуновских экспонент [5, 23]. В этом случае рассчитываются ляпуновские экспоненты для ведомой системы, а так как ее поведение зависит от поведения ведущей системы, то эти ляпуновские экспоненты отличаются от ляпуновских экспонент автономной ведомой системы и называются условными. Критерием существования обобщенной синхронизации в однонаправленно связанных динамических системах [5, 17] является отрицательность старшего условного ляпуновского показателя. Следует также отметить, что для однонаправленно связанных хаотических осцилляторов режимы полной синхронизации и синхронизации с запаздыванием также являются частными случаями режима обобщенной синхронизации [17].

Причины возникновения режима обобщенной синхронизации могут быть выявлены при помощи метода модифицированной системы [24]. Рассмотрим поведение двух однонаправленно связанных хаотических осцилляторов (1). В этом случае ведомую систему $\dot{\vec{x}}_r(t)$ можно рассматривать как некоторую модифицированную систему

$$\dot{\vec{x}}_m(t) = \mathbf{H}'(\dot{\vec{x}}_m(t), \varepsilon) \quad (2)$$

($\mathbf{H}'(\dot{\vec{x}}(t)) = \mathbf{H}(\dot{\vec{x}}(t)) - \varepsilon \mathbf{A} \dot{\vec{x}}(t)$) под внешним воздействием $\varepsilon \mathbf{A} \dot{\vec{x}}_d(t)$:

$$\dot{\vec{x}}_m(t) = \mathbf{H}'(\dot{\vec{x}}_m(t), \varepsilon) + \varepsilon \mathbf{A} \dot{\vec{x}}_d(t). \quad (3)$$

В полученной таким образом системе слагаемое $-\varepsilon \mathbf{A} \dot{\vec{x}}(t)$ фактически вносит дополнительную диссипацию в модифицированную систему (2). Действительно, об уровне диссипации и скорости сжатия фазового объема в рассматриваемой системе свидетельствует дивергенция векторного поля $\text{div} \dot{\vec{x}}$. Понятно, что для автономной и модифицированной систем имеет место соотношение

$$\text{div} \mathbf{H}' = \text{div} \mathbf{H} - \varepsilon \sum_{i=1}^N \delta_{ii} \quad (\varepsilon > 0),$$

где N – размерность фазового пространства модифицированной системы.

Очевидно, что режим обобщенной синхронизации, возникающий в системе (1) при увеличении параметра связи ϵ , может быть рассмотрен как следствие двух взаимосвязанных процессов, протекающих одновременно: увеличения диссипации в модифицированной системе (2) и возрастания амплитуды внешнего сигнала. Оба этих процесса связаны друг с другом посредством параметра ϵ и не могут быть реализованы в ведомой системе (1) независимо друг от друга. Тем не менее понятно, что увеличение диссипации в модифицированной системе (2) приводит к упрощению ее динамики и переходу от хаотических колебаний к периодическим (или в случае большой диссипации – к стационарному состоянию) [24]. Напротив, внешнее хаотическое воздействие $\epsilon \Delta \dot{x}(t)$ стремится усложнить поведение модифицированной системы и навязать ей свою динамику. Как было показано в работах [16, 24], возникновение режима обобщенной синхронизации возможно лишь в том случае, если собственная хаотическая динамика модифицированной системы будет подавлена.

Следует также отметить, что устойчивость периодического режима (наличие которой необходимо для возникновения обобщенной синхронизации) обусловлена, прежде всего, свойствами самой модифицированной системы. При этом расстройка параметров осцилляторов в уравнениях, описывающих модифицированную систему (2), не входит. Соответственно, при изучении механизмов, обуславливающих возникновение режима обобщенной синхронизации, удобно фиксировать значение управляющих параметров \mathbf{g}_r ведомой системы и изменять параметры ведущего осциллятора \mathbf{g}_d для того, чтобы работать при одних и тех же значениях управляющих параметров модифицированной системы.

2. ГРАНИЦЫ РЕЖИМА ОБОБЩЕННОЙ СИНХРОНИЗАЦИИ В ОДНОНАПРАВЛЕННО СВЯЗАННЫХ СИСТЕМАХ РЕССЛЕРА

Рассмотрим установление режима обобщенной синхронизации (GS) в системе двух однонаправленно связанных хаотических осцилляторов Ресслера со слабо различающимися параметрами:

$$\begin{aligned} \dot{x}_d &= -\omega_d y_d - z_d, & \dot{x}_r &= -\omega_r y_r - z_r + \epsilon(x_d - x_r), \\ \dot{y}_d &= \omega_d x_d + a y_d, & \dot{y}_r &= \omega_r x_r + a y_r, \\ \dot{z}_d &= p + z_d(x_d - c), & \dot{z}_r &= p + z_r(x_r - c), \end{aligned} \quad (4)$$

где $a = 0.15$, $p = 0.2$, $c = 10.0$ – управляющие параметры [14], ϵ – параметр связи. Управляющий параметр ведомой системы $\omega_r = 0.95$, характеризую-

щий основную частоту колебаний, был фиксирован (как это уже обсуждалось выше), а аналогичный параметр ведущей системы ω_d варьировался в диапазоне от 0.8 до 1.1 для того, чтобы задать расстройку взаимодействующих осцилляторов.

Как следует из проведенных исследований, порог возникновения режима обобщенной синхронизации при малых расстройках систем существенно выше, чем при больших. В то же время при достаточно больших значениях расстройки связанных систем значение параметра связи ϵ_{GS} , отвечающее возникновению режима обобщенной синхронизации, практически не зависит от величины параметра ω_d ведущей системы (см. рис. (1)).

Подобное поведение рассматриваемых систем может быть объяснено при помощи рассмотренного выше метода модифицированной системы (см. также [16, 24, 25]). Ведомая система из (6) может быть сведена к модифицированной системе

$$\begin{aligned} \dot{x}_m &= -\omega_r y_m - z_m - \epsilon^* x_m, & \dot{y}_m &= \omega_r x_m + a y_m, \\ \dot{z}_m &= p + z_m(x_m - c), \end{aligned} \quad (5)$$

где ϵ^* – параметр диссипации, равный коэффициенту связи ϵ . Для изучения процесса установления режима обобщенной синхронизации была рассмотрена неавтономная динамика модифицированной системы (5)

$$\begin{aligned} \dot{x}_m &= -\omega_r y_m - z_m - \epsilon^* x_m + F(t), \\ \dot{y}_m &= \omega_r x_m + a y_m, & \dot{z}_m &= p + z_m(x_m - c), \end{aligned} \quad (6)$$

при $\epsilon^* = 0.11$, что приблизительно соответствовало границе возникновения обобщенной синхронизации при больших расстройках взаимодействующих осцилляторов, в качестве внешнего сигнала $F(t)$ вместо временной реализации $x_d(t)$ ведущей системы из (4) выступало гармоническое воздействие $F(t) = A \cos(\Omega t)$, амплитуда $A = \epsilon B$ ($B \approx 0.105$) и частота $\Omega \approx \omega_d$ которого соответствовали динамике ведущего осциллятора Ресслера. Подобный выбор был оправдан тем, что фурье-спектр ведущей системы (4) при соответствующих значениях управляющих параметров характеризуется ярко выраженной главной спектральной компонентой, соответствующей основной частоте колебаний.

Было показано, что поведение модифицированной системы (а следовательно, и ведомой системы) должно быть качественно различно внутри языка синхронизации и вне его. Порог возникновения режима обобщенной синхронизации при больших расстройках определяется свойствами самой модифицированной системы (5) (системы находятся вне языка синхронизации, основные частоты не захвачены), а следовательно, не зависит от параметра ведущей системы ω_d . Характер расположения границы обобщенной синхронизации при малых расстройках обусловлен динамикой системы внутри языка синхронизации. При уве-

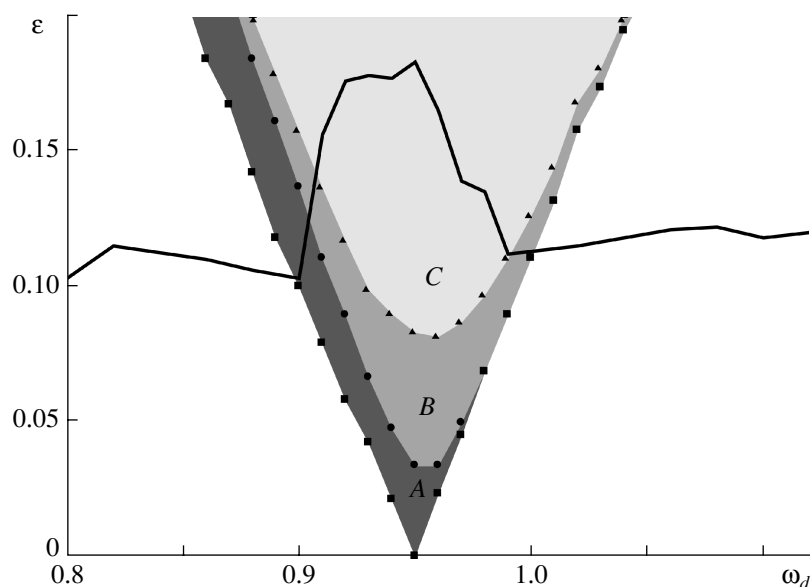


Рис. 1. Граница возникновения режима обобщенной синхронизации для двух однонаправленно связанных осцилляторов Ресслера (4) и язык синхронизации неавтономной модифицированной системы на плоскости управляющих параметров (ω_d, ε) . Область A соответствует возникновению периодических колебаний, B – каскаду бифуркаций удвоения периода, C – возникновению хаотических колебаний

личении амплитуды внешнего воздействия в ключе синхронизации неавтономной модифицированной системы происходит переход к хаотическому режиму через каскад бифуркаций удвоения периода, т.е. в системе возбуждаются хаотические колебания, препятствующие установлению режима обобщенной синхронизации, подавить которые можно лишь увеличением диссипации в модифицированной системе, что соответствует увеличению параметра связи ε в исходной системе однонаправленно связанных осцилляторов Ресслера. Поэтому порог возникновения обобщенной синхронизации сдвигается в сторону больших значений параметра связи. Эта ситуация проиллюстрирована на рис. 1, где на плоскости $(\omega_d = \Omega, \varepsilon)$ показаны ключи синхронизации модифицированной системы Ресслера (5) под внешним гармоническим воздействием и граница возникновения режима обобщенной синхронизации в исходной системе (4). Внутри ключа синхронизации нанесены также линии удвоения периода и линия, соответствующая установлению хаотического режима.

Таким образом, характер поведения границы обобщенной синхронизации обусловлен захватом (либо, наоборот, отсутствием такового) основной собственной частоты ведомой системы основной частотой ведущей системы. Внутри области синхронизации граница возникновения режима обобщенной синхронизации может сдвигаться в сторону больших значений параметра связи в том случае, если внешнее периодическое воздействие внутри языка синхронизации возбуждает собственную хаотическую динамику модифицирован-

ной системы. Соответственно, механизмы, приводящие к установлению режима обобщенной синхронизации, различаются внутри и вне области захвата основных частот. Рассмотрим их более подробно.

3. МЕХАНИЗМ ВОЗНИКНОВЕНИЯ ОБОБЩЕННОЙ СИНХРОНИЗАЦИИ ПРИ БОЛЬШИХ РАССТРОЙКАХ ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ

Начнем рассмотрение со случая большой расстройки значений управляющих параметров взаимодействующих хаотических осцилляторов. В том случае, когда основная частота собственных колебаний ведущей системы f_d достаточно далеко отстроена от основной частоты собственных колебаний ведомой системы f_r , захвата этих частот не происходит, и в фурье-спектре ведомой системы присутствуют два пика, один из которых отвечает частоте f_d , а другой – f_r . Интенсивность этих пиков определяется параметром связи: чем больше величина ε , тем ярче выражен в спектре ведомой системы пик, соответствующий частоте f_d и, наоборот, тем меньше интенсивность спектральной компоненты f_r (рис. 2а и 2б). Почему так происходит, можно легко понять из рассмотрения неавтономной модифицированной системы (6) – увеличение ε ведет, фактически, к росту диссипации в модифицированной системе (соответственно, интенсивность спектральных компонент в системе уменьшается) и одновременно к увеличению ам-

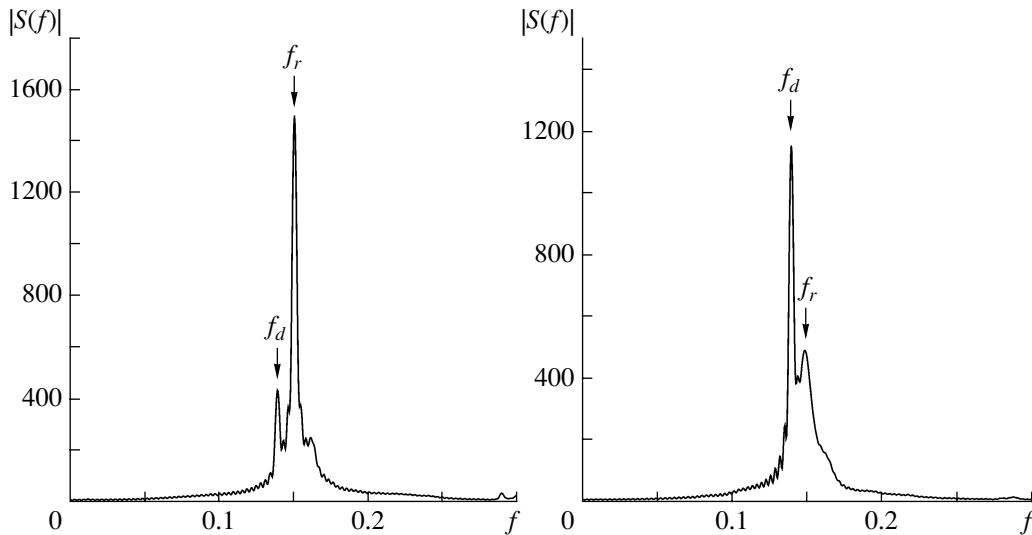


Рис. 2. Фурье-спектры ведомой системы (4), построенные по временной реализации переменной x_r для значений параметра связи $\varepsilon = 0.09$ (а) и 0.14 (б).

плитуды внешнего воздействия, что влечет за собой возрастание интенсивности соответствующей спектральной компоненты.

В работе [26] была описана синхронизация спектральных компонент хаотических генераторов. Так, две спектральные компоненты на частоте f в фурье спектрах взаимодействующих систем $S_{1,2}(f)$ оказываются синхронизованными, если после завершения переходного процесса фазовый сдвиг между ними всегда будет один и тот же независимо от начальных условий. Покажем, что в случае, когда в системе однонаправленно связанных хаотических осцилляторов захвата основных спектральных компонент фурье-спектров парциальных ведущей и ведомой систем не происходит (из-за относительно большой расстройки управляющих параметров), то возникновение режима обобщенной синхронизации возможно только в том случае, когда у однонаправленно связанных ведущей и ведомой систем (2) реализуется режим синхронизации двух несоизмеримых частотных компонент $f_{1d} = f_{1r} = f_1$ и $f_{2d} = f_{2r} = f_2$ фурье-спектров $S_{r,d}(f)$ ведомого $\dot{x}_r(t)$ и ведущего $\dot{x}_d(t)$ осцилляторов. Как уже отмечалось выше, синхронизация пар спектральных компонент $f_{1d} = f_1$ и $f_{1r} = f_1$ означает, что после завершения переходного процесса между ними устанавливается независимый от начальных условий ведомого и ведущего осцилляторов фазовый сдвиг $\Delta\varphi_1 \in [0; 2\pi)$ [26]. Другими словами, если вычислить фурье-спектры $S_d(f)$ и $S_r(f)$ по временным рядам связанных ведомой и ведущей систем, стартующих с произвольных начальных условий, фазовый сдвиг между синхронизованными частотами будет всегда одним и тем же.

Рассмотрим на временном интервале $(-\infty; +\infty)$ две любые фазовые траектории $\dot{x}_{1,2r}(t)$ ведомой динамической системы, принадлежащие одному и тому же хаотическому аттрактору. В этом случае мы можем рассматривать их как одну фазовую траекторию $\dot{x}(t)$, сдвинутую во времени: $\dot{x}_{1r}(t) = \dot{x}(t)$ и $\dot{x}_{2r}(t) = \dot{x}(t + \theta)$, где временной сдвиг θ может быть произвольным и сколь угодно большим. Очевидно, фурье-спектры $S_{1,2r}(f)$, соответствующие фазовым траекториям $\dot{x}_{1,2r}(t)$, связаны друг с другом следующим образом:

$$S_{1r}(f) = S_{2r}(f) \exp(i2\pi f\theta). \quad (7)$$

Так как ведомая и вспомогательная системы идентичны (но стартуют с различных начальных условий), структура их хаотических аттракторов одинакова, и фазовые траектории ведомой и вспомогательной систем могут быть рассмотрены как $\dot{x}_r(t) = \dot{x}(t)$ и $\dot{x}_a(t) = \dot{x}(t + \theta)$, где временной сдвиг θ в общем случае произвольный. Следовательно, фурье-спектры $S_{r,d}(f)$, соответствующие фазовым траекториям ведомой $\dot{x}_r(t)$ и вспомогательной $\dot{x}_a(t)$ систем, также удовлетворяют соотношению (7), где $S_{1r}(f) = S_r(f)$, $S_{2r}(f) = S_a(f)$. Согласно методу вспомогательной системы сделаем вывод, что условие $\theta = 0$ может быть рассмотрено как критерий существования режима обобщенной синхронизации.

Предположим теперь, что только одна пара спектральных компонент $f_{d1} = f_{r1} = f_1$ фурье-спектров ведущей и ведомой систем оказывается синхронизованной. Это означает, что фазовый сдвиг

$\Delta\phi_{f_1}$ между спектральными компонентами фурье-спектров f_1 ведущей $S_d(f)$ и ведомой $S_r(f)$ систем, так же как и между спектральными компонентами f_1 ведущей $S_d(f)$ и вспомогательной $S_a(f)$ систем, является всегда одним и тем же, в то время как сдвиги фаз между остальными спектральными компонентами являются произвольными. Можно показать, что между фазовыми траекториями ведомой $\dot{x}_r(t)$ и вспомогательной $\dot{x}_a(t)$ систем существует счетное множество значений временного сдвига θ_n ($n \in \mathbb{Z}$), удовлетворяющих этому требованию. Действительно, предположим, что фазовый сдвиг между частотными компонентами f_1 ведущей и ведомой систем равен $\Delta\phi_{f_1}$. В этом случае, если временной сдвиг θ_n между фазовыми траекториями ведомой и вспомогательной систем равен

$$\theta_n = n/f_1, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad (8)$$

то сдвиг фаз между частотными компонентами f_1 спектров ведущей и вспомогательной систем также равен $\Delta\phi_{f_1}$, так как $\arg S_r(f_1) = \arg S_a(f_1)$ согласно соотношению (7). Наоборот, если же временной сдвиг θ не подчиняется соотношению (8), фазовый сдвиг между частотными компонентами ведущей f_{d1} и вспомогательной f_{r1} систем отличается от сдвига между частотными компонентами ведущего f_{d1} и вспомогательного f_{a1} осцилляторов. Таким образом, если только одна пара спектральных компонент фурье-спектров ведущей и вспомогательной систем оказывается синхронизованной, временной сдвиг между фазовыми траекториями ведомой и вспомогательной систем θ должен удовлетворять условию (8), причем существует бесконечное число таких возможных временных сдвигов. Очевидно, в этом случае вектора состояний ведомой и вспомогательной систем не совпадают, следовательно, режим обобщенной синхронизации не наблюдается.

Что происходит в том случае, если две пары спектральных компонент фурье-спектров ведущей и ведомой систем оказываются синхронизованными? Очевидно также, что если синхронизованы две кратные (или соизмеримые) частоты f_2 и $f_1 = p/qf_2$ ($p, q = 1, 2, 3, \dots$) в фурье-спектрах $S_{r,d}(f)$ ведущего и ведомого осцилляторов, то и в этом случае возможных значений временных сдвигов между состояниями ведомой и вспомогательной систем оказывается бесконечно много: $\theta = \theta_2 = n/(f_1)(n = 0, \pm p, \pm 2p, \dots)$. А вот в случае, если синхронизованы две несоизмеримые спектральные компоненты f_1 и f_2 (т.е. отношение частот f_1/f_2 иррационально), то существует единственное значение временного сдвига $\theta_0 = 0$ между векторами состояния ведомой и вспомогательной систем. Понятно, что в этом случае выполняется соотношение

$\dot{x}_r(t) = \dot{x}_a(t)$, что свидетельствует о существовании режима обобщенной синхронизации.

Применим изложенные рассуждения для рассмотрения процесса установления режима обобщенной синхронизации в однонаправленно связанных системах Ресслера (4). Для относительно больших значений расстройки управляющих параметров в спектре ведомой системы, как уже рассматривалось выше, выделяются две спектральные компоненты f_d и f_r (см. рис. 2). По всей видимости, именно синхронизация этих двух частотных компонент и ведет к установлению режима обобщенной синхронизации. Для проверки этого предположения построим модельный сигнал $u(t) = A_1 \cos \omega_d t + A_2 \cos \omega_r t$ ($\omega_d = 2\pi f_d$, $\omega_r = 2\pi f_r$), который будет моделировать сигнал ведущей системы $\dot{x}_d(t)$. Покажем, что достаточно только этих двух спектральных компонент во внешнем сигнале $u(t)$, чтобы, воздействуя им на ведомую $\dot{x}_r(t)$ и вспомогательную $\dot{x}_a(t)$ системы –

$$\dot{x}_{r,a} = -\omega_r y_{r,a} - z_{r,a} + \varepsilon(u(t) - x_{r,a}), \quad (9)$$

$$\dot{y}_{r,a} = \omega_r x_{r,a} + a y_{r,a}, \quad \dot{z}_{r,a} = p + z_{r,a}(x_{r,a} - c),$$

обеспечить совпадение состояний этих систем $\dot{x}_r(t) = \dot{x}_a(t)$, что является критерием существования режима обобщенной синхронизации. Амплитуды A_1 и A_2 выберем таким образом, чтобы интенсивность гармонических составляющих f_d и f_r (рис. 3) в фурье-спектре $S_u(f)$ сконструированного сигнала $u(t)$ отвечала интенсивности соответствующих спектральных компонент в фурье-спектре $S_{xd}(f)$ временной реализации $x_d(t)$ ведущей системы Ресслера. Величина $A_1 = 7.75$ обусловлена интенсивностью основной спектральной компоненты в спектре $S_{xd}(f_d)$ ведущей системы. В свою очередь, амплитуда $A_2 = 1.1$ определяется величиной интенсивности хаотического пьедестала в спектре $S_{xd}(f)$ ведущей системы на частоте ω_r , который (пьедестал) всегда существует за счет хаотической динамики рассматриваемой системы.

На рис. 4 показаны (а) фазовый портрет неавтономной ведомой системы Ресслера (12), находящейся под бигармоническим воздействием и (б) плоскость $(x_r; x_a)$, показывающая поведение неавтономных ведомой и вспомогательной систем (9) для значения параметра связи $\varepsilon = 0.110$. Отчетливо видно, что все изображающие точки на плоскости $(x_r; x_a)$ ложатся на диагональ $x_r = x_a$, что свидетельствует об идентичности поведения ведомой и вспомогательной систем. В этом случае можно говорить об установлении режима обобщенной синхронизации.

Следует однако отметить один важный аспект проведенного рассмотрения: фактически, сигнал

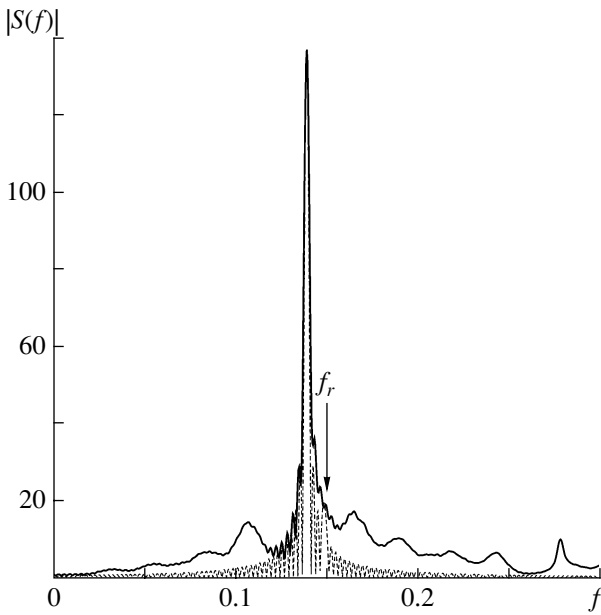


Рис. 3. Фурье-спектры ведущей системы Ресслера (4), построенные по временной реализации переменной $x_d(t)$ (сплошная линия) и искусственно сконструированного двухчастотного сигнала $u(t)$ (пунктирная линия), $A_1 = 7.75$, $A_2 = 1.1$ (частота f_r показана стрелкой). Видно, что амплитуды $A_{1,2}$ сигнала $u(t)$ подобраны таким образом, что интенсивности спектральных компонент f_d и f_r одинаковы в обоих спектрах.

ведущего хаотического осциллятора (4) был заменен на квазипериодический сигнал $u(t)$ с двумя несоизмеримыми частотами f_d и f_r (понятно, что можно подобрать значение управляющих параметров ведущего осциллятора таким образом, чтобы частоты f_d и f_r состояли друг с другом в ра-

циональном соотношении $f_d^{p,q} = pf_r/q$, где $p, q \in \mathbb{N}$, но мера множества таких значений $f_d^{p,q}$ на действительной прямой равна нулю). В отсутствие внешнего сигнала (например, если положить $A_1 = A_2 = 0$) система (9) при выбранном значении параметра ϵ демонстрирует периодическое поведение (см. разд. 2). Т.е. при выбранных значениях управляющих параметров на систему, демонстрирующую периодические колебания, действует внешний квазипериодический сигнал. Поэтому режим обобщенной синхронизации ведомой системы Ресслера (9) внешним квазипериодическим сигналом $u(t)$, моделирующим временную реализацию ведущей системы Ресслера, будет реализовываться при меньших значениях параметра связи ϵ по сравнению со случаем обобщенной синхронизации системы (4). Фактически, в рассматриваемом случае граница обобщенной синхронизации системы Ресслера квазипериодическим сигналом будет близка к моменту установления периодических колебаний цикла периода один в модифицированной системе (5), т.е. при $\epsilon \approx 0.07$.

Понятно, что при обобщенной синхронизации систем Ресслера (4) сигнал, воздействующий на ведомую систему, является хаотическим. Сконструированный сигнал $u(t)$ адекватно моделирует энергетический состав основных компонент фурье-спектра временной реализации $x_d(t)$, обуславливающих установление синхронной динамики, но не передает всех особенностей сигнала ведущей системы. В то же время, по всей видимости, “хаотический” пьедестал в спектре $S_{x_d}(f)$ ведущей системы обуславливает сдвиг значения параметра связи ϵ , при котором возникает режим обобщенной синхронизации, в область больших значе-

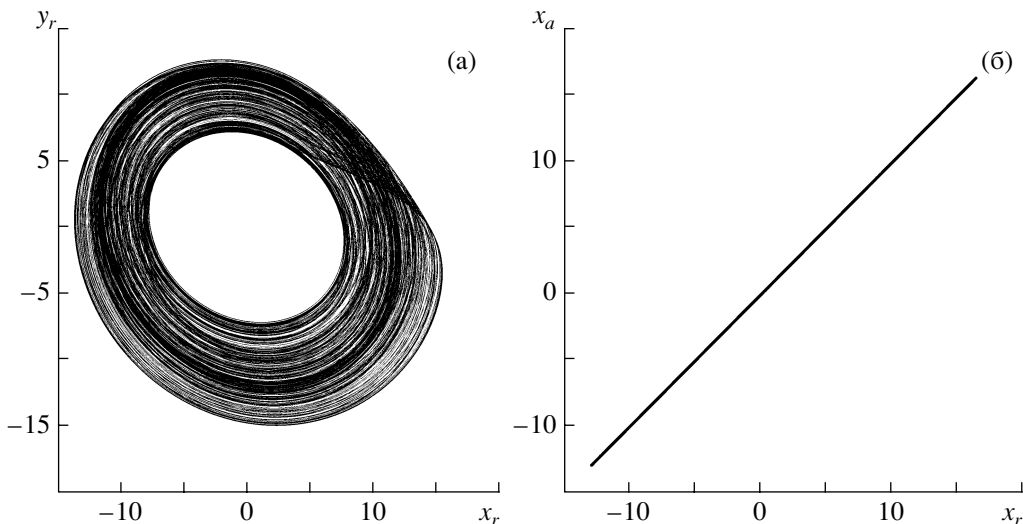


Рис. 4. Фазовый портрет неавтономной ведомой системы Ресслера (9) (а) и плоскость $(x_r; x_a)$, показывающая поведение неавтономных ведомой и вспомогательной систем (9) для значения параметра связи $\epsilon = 0.11$ (б).

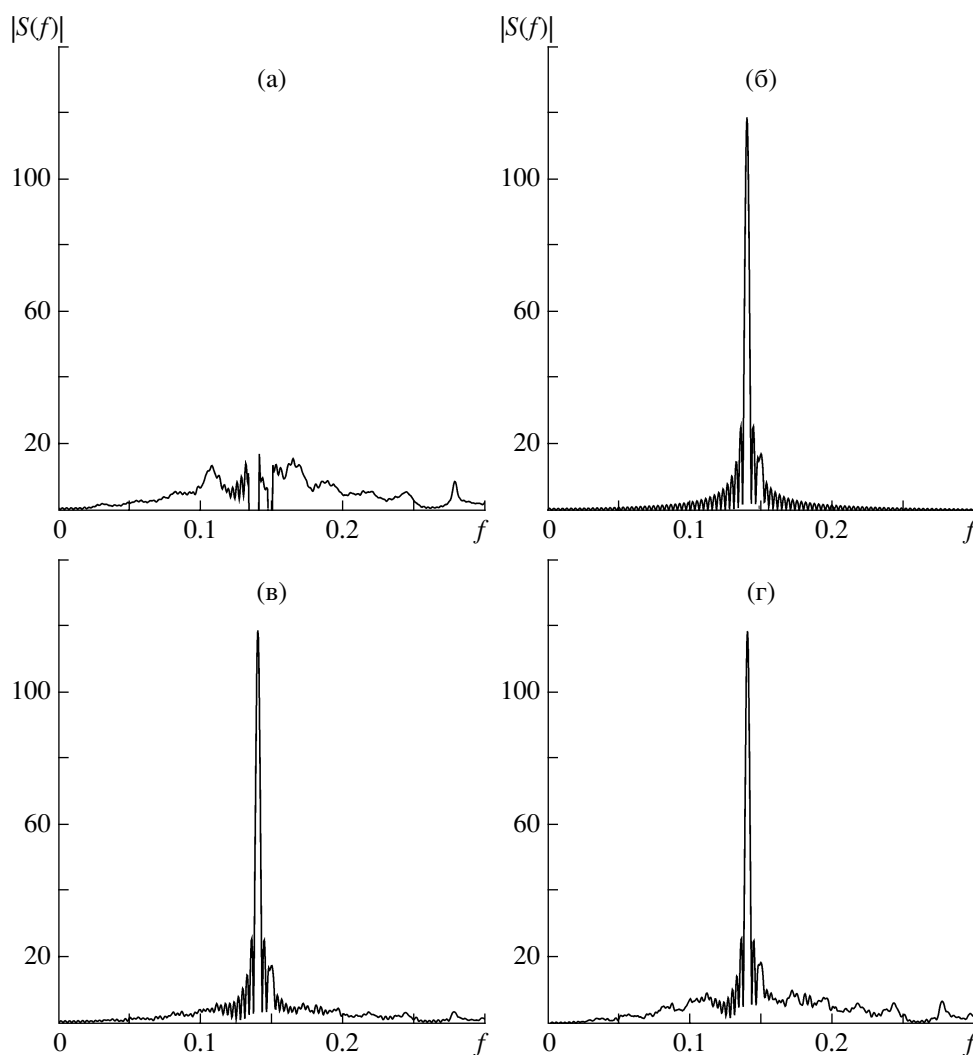


Рис. 5. Фурье-спектры сигналов $v(t)$ (а) и $w(t)$ для $m = 0$ (б), 0.5 (в) и 1 (г). Различия в соответствующих спектрах рис. 5г и рис. 3 обусловлены тем, что при их построении осуществлялось различное число усреднений.

ний. Для того чтобы проверить это предположение, добавим к квазипериодическому сигналу $u(t)$ сигнал $m v(t)$, который будет моделировать хаотическую составляющую сигнала $x_d(t)$. Параметр m является амплитудой добавляемого сигнала $v(t)$, а сам сигнал $v(t)$ получается из временной реализации $x_d(t)$ с помощью удаления из его спектра спектральных компонент f_d и f_r . При проведении численного моделирования сигнал $v(t)$ был получен следующим образом: временная реализация $x_r(t)$, порожденная ведущей системой Ресслера (4), подвергалась преобразованию Фурье $\Phi[\cdot]$, затем в полученном спектре $S_{xr}(f) = \Phi[x_r(t)]$ полагалось, что $|S_{xr}(f^*)| = 0$, где $f^* \in [f_d - \Delta f_d; f_d + \Delta f_d] \cup [f_r - \Delta f_r; f_r + \Delta f_r]$, $\Delta f_r = 10^{-3}$, $\Delta f_d = 2.5 \times 10^{-3}$ (величины Δf_d и Δf_r были выбраны разными в связи с различной интенсивностью соответствующих спектральных компонент и их шириной соответственно), после

чего для полученного спектра $S'_{xr}(f)$ (рис. 5а) выполнялось обратное преобразование Фурье: $v(t) = \Phi^{-1}[S'_{xr}(t)]$. Таким образом, рассматривая сигнал $w(t) = u(t) + m v(t)$ и изменяя величину параметра m в интервале $[0; 1]$, можно моделировать влияние хаотической динамики на порог возникновения режима обобщенной синхронизации в системе (4): при $m = 0$ временная реализация $w(t)$ является квазипериодической и совпадает с $u(t)$, а при $m = 1$ она по своим характеристикам близка к временной реализации $x_d(t)$. Соответствующая ситуация изображена на рис. 5б–5г, где показаны спектры сигнала $w(t)$ для различных значений параметра m . На рис. 5б представлен фактически спектр двухчастотного сигнала $u(t)$, соответствующий случаю $m = 0$ для сигнала $w(t)$, а на рис. 5в, 5г – спектры сигнала $w(t)$ для значения параметра $m = 0.5$ и $m = 1.0$. Зафиксировав величину параметра $\varepsilon = 0.09$

и воздействуя на систему (9) вместо сигнала $u(t)$ сигналом $w(t)$ с разными значениями параметра m , можно увидеть, что возникновение режима обобщенной синхронизации возникает при величине $m < 0.3$.

Таким образом, все изложенное выше позволяет утверждать, что для относительно больших расстройек однонаправленно связанных хаотических осцилляторов возникновение режима обобщенной синхронизации обусловлено прежде всего синхронизацией двух частотных компонент с несоизмеримыми частотами. Одной частотой является основная частота ведущей системы (и понятно, что она будет всегда синхронизована с частотной компонентой на этой же самой частоте (фактически со своим откликом) в фурье-спектре ведомой системы), а вторая частота – собственная частота ведомой системы, синхронизируемая спектральной компонентой “хаотического” пьедестала фурье-спектра ведущей системы. Однако важную роль играют также все остальные частотные компоненты, входящие в хаотический пьедестал фурье-спектра ведущей системы. Именно их влияние определяет значение параметра связи ϵ , при котором устанавливается режим обобщенной синхронизации.

4. МЕХАНИЗМ ВОЗНИКНОВЕНИЯ ОБОБЩЕННОЙ СИНХРОНИЗАЦИИ ПРИ МАЛЫХ РАССТРОЙКАХ ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ

Рассмотрим теперь механизмы, приводящие к возникновению режима обобщенной синхронизации при малых расстройках управляющих параметров однонаправленно связанных хаотических осцилляторов (1). Как было показано в разд. 2, в этом случае характер расположения границы обобщенной синхронизации определяется наличием захвата основных спектральных компонент. Кроме того, как было показано ранее, при увеличении параметра связи ϵ и, соответственно, амплитуды внешнего воздействия в неавтономной модифицированной системе (6) наблюдается переход к хаосу через каскад бифуркаций удвоения периода (см. также рис. 1). Таким образом, механизмы, обуславливающие возникновение режима обобщенной синхронизации, будут отличаться в различных областях языка синхронизации и, следовательно, должны быть исследованы отдельно.

Как было показано выше, режим обобщенной синхронизации в исходной системе (4) при малых расстройках возникает при значении параметра связи $\epsilon > 0.15$ (см. рис. 1). При таких значениях параметров неавтономная модифицированная система с $\epsilon^* = 0.11$ находится в хаотическом режиме. Однако разделение механизмов, приводящих к установлению режима обобщенной синхронизации

(использование соотношения (6) с учетом $F(t) = \epsilon x_d(t)$), позволяет добиться точного совпадения состояний ведомой $\dot{x}_r(t)$ и вспомогательной $\dot{x}_a(t)$ систем при наличии внешнего воздействия со стороны ведущей системы даже в том случае, когда соответствующая автономная модифицированная система (5) демонстрирует периодические колебания.

Начнем рассмотрение с наиболее простого случая: в неавтономной модифицированной системе наблюдаются периодические колебания цикла периода один. Фурье-спектр такой системы характеризуется наличием одной четко выраженной спектральной компоненты на частоте, равной собственной частоте колебаний системы. В этом случае эволюция системы не будет зависеть от выбора начальных условий. Таким образом, для того чтобы синхронизовать две идентичные системы, стартующие с различных начальных условий, достаточно подать периодическое внешнее воздействие (обеспечивающее возникновение периодических колебаний цикла периода один в ведомой и вспомогательной системах). Так как частота внешнего воздействия близка к собственной частоте колебаний модифицированной системы, возникает захват частот и, следовательно, синхронизация (см. также [27]). Понятно, что в случае хаотической обобщенной синхронизации воздействие, оказываемое на ведомую систему, является хаотическим, что, однако, не ведет к разрушению описанных механизмов синхронизации.

В том случае, когда в неавтономной модифицированной системе наблюдаются периодические колебания цикла периода два, множество начальных условий, с которых стартует ведомая система при фиксированных начальных условиях вспомогательной системы, можно разделить на две области: при гармоническом внешнем воздействии в ведомой и вспомогательной системах возникают или синфазные, или противофазные колебания. Очевидно, что в первом случае синхронизация будет наблюдаться всегда (как и в случае периодических колебаний цикла периода один), а второй случай требует дополнительных исследований и представляет наибольший интерес. Остановимся на нем более подробно.

Так как в неавтономной модифицированной системе наблюдаются периодические колебания цикла периода два, кроме спектральной компоненты, соответствующей основной частоте колебаний системы, в ее фурье-спектре присутствуют также субгармоники. Естественно предположить, что обобщенная синхронизация в данном случае возникает именно за счет захвата этих спектральных компонент. Начнем исследование поведения

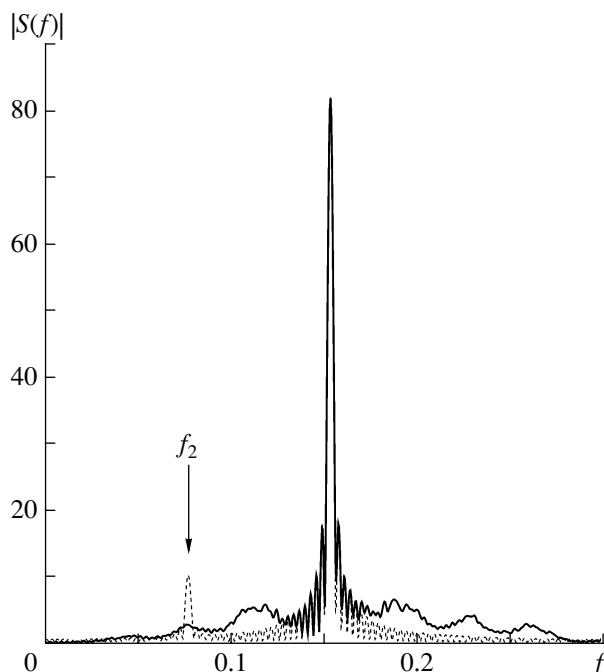


Рис. 6. Фурье-спектры ведущей системы Ресслера (4), построенные по временной реализации переменной $x_d(t)$ (сплошная линия) и искусственно сконструированного сигнала $u(t)$ (пунктирная линия), $A_1 = 4.5$, $A_2 = 0.5680$. Амплитуда A_1 сигнала $u(t)$ подобрана так, что интенсивности спектральной компоненты f_d одинаковы в обоих спектрах. Амплитуда A_2 достаточно сильно превышает величину шумового пьедестала в фурье-спектре ведущей системы. Соответствующая субгармоника $f_2 = \Omega_2/(2\pi)$ показана стрелкой. При выбранных значениях параметров в системе (9) наблюдается режим обобщенной синхронизации

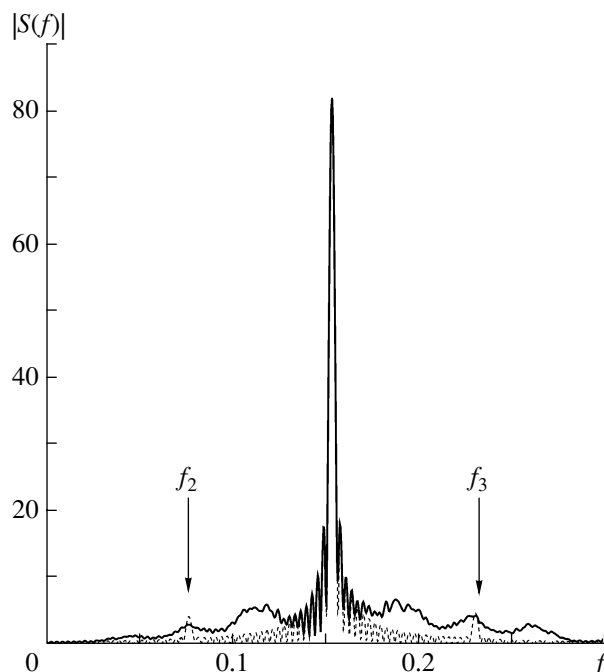


Рис. 7. Фурье-спектры ведущей системы Ресслера (4), построенные по временной реализации переменной $x_d(t)$ (сплошная линия) и искусственно сконструированного сигнала $u(t)$ (пунктирная линия), $A_1 = 4.5$, $A_2 = 0.236$ и $A_3 = 0.264$. Видно, что амплитуды $A_{1,2,3}$ сигнала $u(t)$ подобраны таким образом, что интенсивности спектральной компоненты f_d одинаковы в обоих спектрах, а амплитуды двух других гармоник $f_2 = \Omega_2/(2\pi)$ и $f_3 = \Omega_3/(2\pi)$ (показаны стрелками) не превышают величины шумового пьедестала в фурье-спектре ведущей системы. При указанных значениях параметров в системе (9) наблюдается режим обобщенной синхронизации.

системы (9) с того случая, когда сигнал $u(t)$ представляет собой сумму двух сигналов, т.е.

$$u(t) = A_1 \cos(\Omega t) + A_2 \cos(\Omega_2 t),$$

где $\Omega = 2\pi f_d$ и A_1 – частота и амплитуда гармонического сигнала, выбранные таким образом, чтобы обеспечить достаточно точное совпадение основных спектральных компонент фурье-спектров этого сигнала и ведущей системы из (4) как по амплитуде, так и по частоте, $\Omega_2 = \Omega/2$ и A_2 – частота и амплитуда “вспомогательного” сигнала, соответствующего субгармонике. Изменение A_2 в диапазоне $[0; A_1]$ позволяет добиться возникновения режима обобщенной синхронизации, начиная со случая $A_2 \approx A_1/8$. Фурье-спектры такого сигнала и ведущей системы приведены на рис. 6. Видно, что амплитуда “второй гармоники” достаточно сильно превосходит величину шумового пьедестала в фурье-спектре ведущей системы.

Теперь рассмотрим случай, когда

$$u(t) = A_1 \cos(\Omega t) + A_2 \cos(\Omega_2 t) + A_3 \cos(\Omega_3 t),$$

где $\Omega_3 = 3/2\Omega$, т.е. добавим еще одну составляющую во внешнее воздействие. Будем изменять A_2 и A_3 до тех пор, пока состояния ведомой $\dot{x}_r(t)$ и вспомогательной $\dot{x}_a(t)$ систем не начнут совпадать. Действительно, добавление третьей гармоники позволяет добиться возникновения режима обобщенной синхронизации в том случае, когда амплитуды “добавленных гармоник” практически не превышают величины шумового пьедестала в фурье-спектре ведущей системы (см. также рис. 7). Очевидно, что добавление в модельный сигнал $u(t)$ гармоник, соответствующих более высоким частотам, только улучшит рассматриваемую ситуацию. Аналогичная ситуация имеет место и при значениях параметров, при которых в автономной модифицированной системе (5) реализуются циклы периодов $2^n T$, до тех пор, пока внутри языка синхронизации неавтономной модифицированной системы (6) не возникнет хаотический режим, приводящий к разрушению режима

обобщенной синхронизации в однонаправленно связанных осцилляторах (4).

Таким образом, можно сделать вывод о том, что механизмы, приводящие к установлению режима обобщенной синхронизации в системе двух однонаправленно связанных хаотических осцилляторов со слегка отстроенными друг от друга управляющими параметрами обусловлены синхронизацией основной спектральной компоненты ведомой системы и ее субгармоник.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе рассмотрены причины, приводящие к установлению режима обобщенной хаотической синхронизации и объяснен характер расположения границы возникновения синхронного режима на плоскости управляющих параметров “величина расстройки – интенсивность связи”. Для объяснения физических механизмов, приводящих к возникновению режима обобщенной синхронизации, использован метод модифицированной системы. Механизмы установления синхронного режима различны при больших и малых расстройках взаимодействующих систем. В случае относительно больших расстройек возникновение обобщенной синхронизации обусловлено свойствами самой модифицированной системы. В этом случае синхронизация возникает за счет захвата двух частотных компонент с несоизмеримыми частотами, соответствующих основной частоте ведущей системы и собственной частоте ведомой системы. Остальные частотные компоненты, входящие в хаотический пьедестал фурье-спектра ведущей системы, влияют на порог возникновения режима обобщенной синхронизации. Механизмы, приводящие к установлению режима обобщенной синхронизации, при относительно слабых расстройках взаимодействующих систем целиком определяются синхронизацией основной спектральной компоненты ведомой системы и ее субгармоник.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 05-02-16273 и 06-02-16451), Совета по грантам при Президенте Российской Федерации (государственная программа поддержка ведущих научных школ, грант НШ-4167.2006.2), Фонда некоммерческих программ “Династия” и Международного центра фундаментальной физики (г. Москва), а также CRDF (грант REC-006).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Pikovsky A., Rosenblum M., Kurths J.* Synchronization: a universal concept in nonlinear sciences. Cambridge: Cambridge University Press, 2001.
2. *Анищенко В.С., Астахов В.В., Вадивасова Т.Е. и др.* Нелинейные эффекты в хаотических и стохастических системах. М.; Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003.
3. *Rulkov N.F., Sushchik M.M., Tsimring L.S., Abarbanel H.D.I.* // *Phys. Rev. E.* 1995. V. 51. № 2. P. 980.
4. *Rosenblum M.G., Pikovsky A.S., Kurths J.* // *Phys. Rev. Lett.* 1997. V. 78. № 22. P. 4193.
5. *Pecora L.M., Carroll T.L.* // *Phys. Rev. A.* 1991. V. 44. № 4. P. 2374.
6. *Короновский А.А., Храмов А.Е.* // *РЭ.* 2005. Т. 50. № 7. С. 1.
7. *Hramov A.E., Koronovskii A.A.* // *Physica D.* 2005. V. 206. № 3–4. P. 252.
8. *Короновский А.А., Храмов А.Е.* // *Письма в ЖЭТФ.* 2004. Т. 79. № 7. С. 391.
9. *Hramov A.E., Koronovskii A.A.* // *Chaos.* 2004. V. 14. № 3. P. 603.
10. *Boccaletti S., Pecora L.M., Pelaez A.* // *Phys. Rev. E.* 2001. V. 63. P. 066219.
11. *Brown R., Kocarev L.* // *Chaos.* 2000. V. 10. № 2. P. 344.
12. *Короновский А.А., Москаленко О.И., Храмов А.Е.* // *Письма в ЖЭТФ.* 2004. Т. 80. № 1. С. 25.
13. *Parlitz U., Junge L., Lauterborn W., Kocarev L.* // *Phys. Rev. E.* 1996. V. 54. № 2. P. 2115.
14. *Zheng Z., Hu G.* // *Phys. Rev. E.* 2000. V. 62. № 6. P. 7882.
15. *Короновский А.А., Храмов А.Е.* // *Письма в ЖТФ.* 2004. Т. 30. № 23. С. 54.
16. *Hramov A.E., Koronovskii A.A., Moskalenko O.I.* // *Europhys. Lett.* 2005. V. 72. № 6. P. 901.
17. *Pyragas K.* // *Phys. Rev. E.* 1996. V. 54. № 5. P. R4508.
18. *Hramov A.E., Koronovskii A.A., Popov P.V.* // *Phys. Rev. E* 2005. P. 72. № 3. P. 037201.
19. *Короновский А.А., Москаленко О.И., Филатов Р.А., Храмов А.Е.* // *Изв. РАН. Сер. физическая.* 2005. Т. 69. № 12. С. 1741.
20. *Pecora L.M., Carroll T.L., Heagy J.F.* // *Phys. Rev. E.* 1995. V. 52. № 4. P. 3420.
21. *Abarbanel H.D.I., Rulkov N.F., Sushchik M.M.* // *Phys. Rev. E.* 1996. V. 53. № 5. P. 4528.
22. *Hramov A.E., Koronovskii A.A.* // *Europhys. Lett.* 2005. V. 70. № 2. P. 169.
23. *Pyragas K.* // *Phys. Rev. E.* 1997. V. 56. № 5. P. 5183.
24. *Hramov A.E., Koronovskii A.A.* // *Phys. Rev. E.* 2005. V. 71. № 6. P. 067201.
25. *Короновский А.А., Москаленко О.И., Храмов А.Е.* // *Письма в ЖТФ.* 2006. Т. 32. № 3. С. 40.
26. *Hramov A.E., Koronovskii A.A., Kurovskaya M.K., Moskalenko O.I.* // *Phys. Rev. E.* 2005. V. 71. № 5. P. 056204.
27. *Adler R.* // *Proc. IRE.* 1949. V. 34. № 6. P. 351.