ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 2006, том 407, № 6, с. 1–5

ФИЗИКА

УДК 519.7

ОБОБЩЕННАЯ СИНХРОНИЗАЦИЯ И СИНХРОНИЗАЦИЯ, ИНДУЦИРОВАННАЯ ШУМОМ, – ЕДИНЫЙ ТИП ПОВЕДЕНИЯ СВЯЗАННЫХ ХАОТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

© 2006 г. А. А. Короновский, О. И. Москаленко,
член-корреспондент РАН Д. И. Трубецков, А. Е. Храмов

Поступило 11.10.2005 г.

В работе показано, что два типа поведения нелинейных хаотических систем, обобщенная синхронизация и синхронизация, индуцированная шумом, представляют собой единый тип синхронного поведения, возникновение которого обусловлено одной причиной – дополнительным введением диссипации в систему.

Изучение особенностей синхронизации связанных хаотических осцилляторов в настоящее время представляется важным и актуальным направлением теоретических и экспериментальных исследований, имеющих важное практическое значение, связанное с анализом и диагностикой медицинских и физиологических данных, секретной передачей информации, управлением радиофизическими и лазерными системами [1–3]. В настоящее время выделяют различные типы хаотической синхронизации, каждый из которых имеет свои особенности и методы диагностики [1]. Важным является нахождение и анализ общих закономерностей хаотической синхронизации, что требует нахождение связи между различными ее типами. Так, в работах [4, 5] было показано, что различные типы хаотической синхронизации в потоковых системах с малым числом степеней свободы могут быть сведены к одному типу – синхронизации временных масштабов. Однако, представляется важным дальнейшее обобщение и выявление общих механизмов, приводящих к установлению различных типов хаотической синхронизации.

В данной работе показано, что два типа синхронизации хаотических осцилляторов (обобщенная синхронизация [6, 7] и синхронизация, индуцированная шумом [8–10]), считавшихся ранее различными, обусловлены одной и той же причиной и являются одним типом синхронного поведения.

Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского

Под обобщенной синхронизацией однонаправленно связанных хаотических осцилляторов понимается такой тип синхронного поведения, когда между состояниями $\mathbf{x}(t)$ и $\mathbf{u}(t)$ хаотических осцилляторов с непрерывным или дискретным временем соответственно

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{H}(\mathbf{x}(t)),\\ \dot{\mathbf{u}}(t) &= \mathbf{G}(\mathbf{u}(t)) + \mathbf{E}(\mathbf{u}(t), \mathbf{x}(t))\end{aligned} \qquad (1)$$

и

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(n+1) &= \mathbf{H}(\mathbf{x}(n)),\\ \mathbf{u}(n+1) &= \mathbf{G}(\mathbf{u}(n)) + \mathbf{E}(\mathbf{u}(n), \mathbf{x}(n))\end{aligned} \qquad (2)$$

(где $\mathbf{H}$, $\mathbf{G}$ – операторы эволюции ведущей и ведомой систем соответственно, $\mathbf{E}$ – вектор-функция, описывающая связь между ведущей $\mathbf{x}(t)$ и ведомой $\mathbf{u}(t)$ системами) существует некоторая функциональная зависимость $\mathbf{F}[\cdot]$, такая, что $\mathbf{u}(t) = \mathbf{F}[\mathbf{x}(t)]$ [6, 7]. Вид данной зависимости может быть достаточно сложным, а процедура ее нахождения весьма нетривиальна. В зависимости от вида функциональной зависимости – гладкая или фрактальная – обобщенную синхронизацию подразделяют соответственно на сильную и слабую[7]. При этом в качестве взаимодействующих осцилляторов могут выступать две разные динамические системы, в том числе и с разной размерностью фазового пространства.

Для обнаружения режима обобщенной синхронизации между хаотическими осцилляторами (1) может быть использован метод вспомогательной системы [6]: наряду с ведомой системой $\mathbf{u}(t)$ рассматривается идентичная ей вспомогательная система $\mathbf{v}(t)$, динамика которой также описывается соотношением (1), но вместо вектора состояния $\mathbf{u}(t)$ используется вектор $\mathbf{v}(t)$, соответствующий вспомогательной системе, начальные условия для которой $\mathbf{v}(t_0)$ отличны от начального состояния ведомой системы $\mathbf{u}(t_0)$, но принадлежат бассейну притяжения того же аттрактора, что и $\mathbf{u}(t_0)$. При отсутствии обобщенной синхронизации вектора состояния ведомой $\mathbf{u}(t)$ и вспомогательной $\mathbf{v}(t)$ систем являются различными. В том случае, когда имеет место режим обобщенной синхронизации, в силу выполнения соотношений $\mathbf{u}(t) = \mathbf{F}[\mathbf{x}(t)]$ и, соответственно, $\mathbf{v}(t) = \mathbf{F}[\mathbf{x}(t)]$ после завершения переходного процесса состояния ведомой и вспомогательной систем должны стать идентичными $\mathbf{u}(t) = \mathbf{v}(t)$. Таким образом, эквивалентность состояний ведомой и вспомогательной систем является критерием наличия обобщенной синхронизации между ведущим и ведомым осцилляторами.

Диагностирование режима обобщенной синхронизации может быть проведено также с помощью вычисления условных ляпуновских экспонент [7]. В этом случае рассчитываются ляпуновские экспоненты для ведомой системы, а так как ее поведение зависит от поведения ведущей системы, то они отличаются от ляпуновских экспонент автономной системы и называются условными. Критерием существования обобщенной синхронизации является отрицательность старшего условного ляпуновского показателя [7].

Под режимом синхронизации, индуцированной шумом [8–10] понимается следующее: случайный сигнал $\xi(t)$, действующий на две независимые, но идентичные хаотические системы $\mathbf{u}(t)$ и $\mathbf{v}(t)$ (с разными начальными условиями $\mathbf{u}(t_0)$ и $\mathbf{v}(t_0)$), может приводить к тому, что эти системы "синхронизуются" друг с другом, т.е. после завершения переходного процесса $\mathbf{u}(t) \equiv \mathbf{v}(t)$. И в этом случае, как и для режима обобщенной синхронизации, установление синхронной динамики двух систем с общим источником шума возможно лишь тогда, когда все условные ляпуновские экспоненты оказываются отрицательными [11].

Ранее показано, что возможны два схожих механизма, приводящих к возникновению режима индуцированной шумом синхронизации:

случайный сигнал $\xi(t)$, действующий на идентичные хаотические системы, имеет ненулевое среднее, что фактически переводит систему в нехаотический режим [12, 13], при котором состояние системы просто "следует" за внешним случайным возмущением $\xi(t)$:

внешний случайный сигнал большой интенсивности переводит изображающую точку в области фазового пространства с большим сжатием фазового потока, которая находится в этих областях большую долю времени, в результате чего в среднем имеет место сходимость соседних траекторий [10, 14].

В обоих случаях определяющую роль играет сжатие фазового потока и условные ляпуновские экспоненты являются отрицательными.

Одинаковое поведение двух идентичных хаотических систем, на которые действует один и тот же хаотический сигнал, означает, что возникает функциональная зависимость между состоянием динамической системы и внешним случайным сигналом. Действительно, если обозначить состояние каждой из систем через $\mathbf{x}_1$ и $\mathbf{x}_2$, то наличие индуцированной шумом синхронизации означает, что $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2$. Очевидно, что $\mathbf{x}_1(t) = \mathbf{F}_1[\xi(t)]$ и $\mathbf{x}_2(t) = \mathbf{F}_2[\xi(t)]$, где $\mathbf{F}_1$ и $\mathbf{F}_2$ – некоторые функциональные зависимости, в общем случае различные для различных начальных условий $\mathbf{x}_0$. Однако из факта наличия индуцированной шумом синхронизации следует, что функциональные зависимости $\mathbf{F}_1$ и $\mathbf{F}_2$ оказываются одинаковыми и не зависят от начальных условий, т.е. возникает однозначная функциональная зависимость между состоянием динамической системы и внешним шумовым сигналом.

Аналогичные эффекты, связанные с введением в систему дополнительной диссипации, как показано в нашей работе [15], приводят к установлению режима обобщенной синхронизации. Во-первых, режим обобщенной синхронизации может наблюдаться для двух однонаправленно связанных диссипативной связью хаотических осцилляторов с малой расстройкой управляющих параметров. В этом случае уравнения, описывающие поведение системы (1), могут быть записаны в виде

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{H}(\mathbf{x}(t)), \\ \dot{\mathbf{u}}(t) &= \mathbf{H}(\mathbf{u}(t)) + \varepsilon\mathbf{A}(\mathbf{x}(t) - \mathbf{u}(t)), \end{aligned} \tag{3}$$

где $\mathbf{A} = \{\delta_{ij}\}$ – матрица связи, ε – сила связи, $\delta_{ii} = 0$ или 1, $\delta_{ij} = 0$ $(i \neq j)$. Очевидно, что ведомая система $\mathbf{u}(t)$ может быть рассмотрена как некоторая модифицированная система

$$\dot{\mathbf{u}}_m(t) = \mathbf{H}'(\mathbf{u}_m(t), \varepsilon) \tag{4}$$

под внешним воздействием $\varepsilon\mathbf{A}\mathbf{x}(t)$

$$\dot{\mathbf{u}}_m(t) = \mathbf{H}'(\mathbf{u}_m(t), \varepsilon) + \varepsilon\mathbf{A}\mathbf{x}(t), \tag{5}$$

где $\mathbf{H}'(\mathbf{u}(t)) = \mathbf{H}(\mathbf{u}(t)) - \varepsilon\mathbf{A}\mathbf{u}(t)$. Слагаемое $-\varepsilon\mathbf{A}\mathbf{u}(t)$ вносит дополнительную диссипацию в модифицированную систему (4). Все вышеизложенное остается справедливым и для систем с дискретным временем (2).

Режим обобщенной синхронизации, возникающий в системе (3), может быть рассмотрен как следствие двух взаимосвязанных процессов, протекающих одновременно: увеличения диссипации в модифицированной системе (4) и возрастания амплитуды внешнего сигнала. Оба процесса связаны друг с другом посредством параметра ε и не могут быть реализованы в ведомой системе (3) отдельно. Однако увеличение диссипации в модифицированной системе (4) приводит к упрощению ее поведения и переходу от хаотических колебаний к периодическим (или к стационарному состоянию).

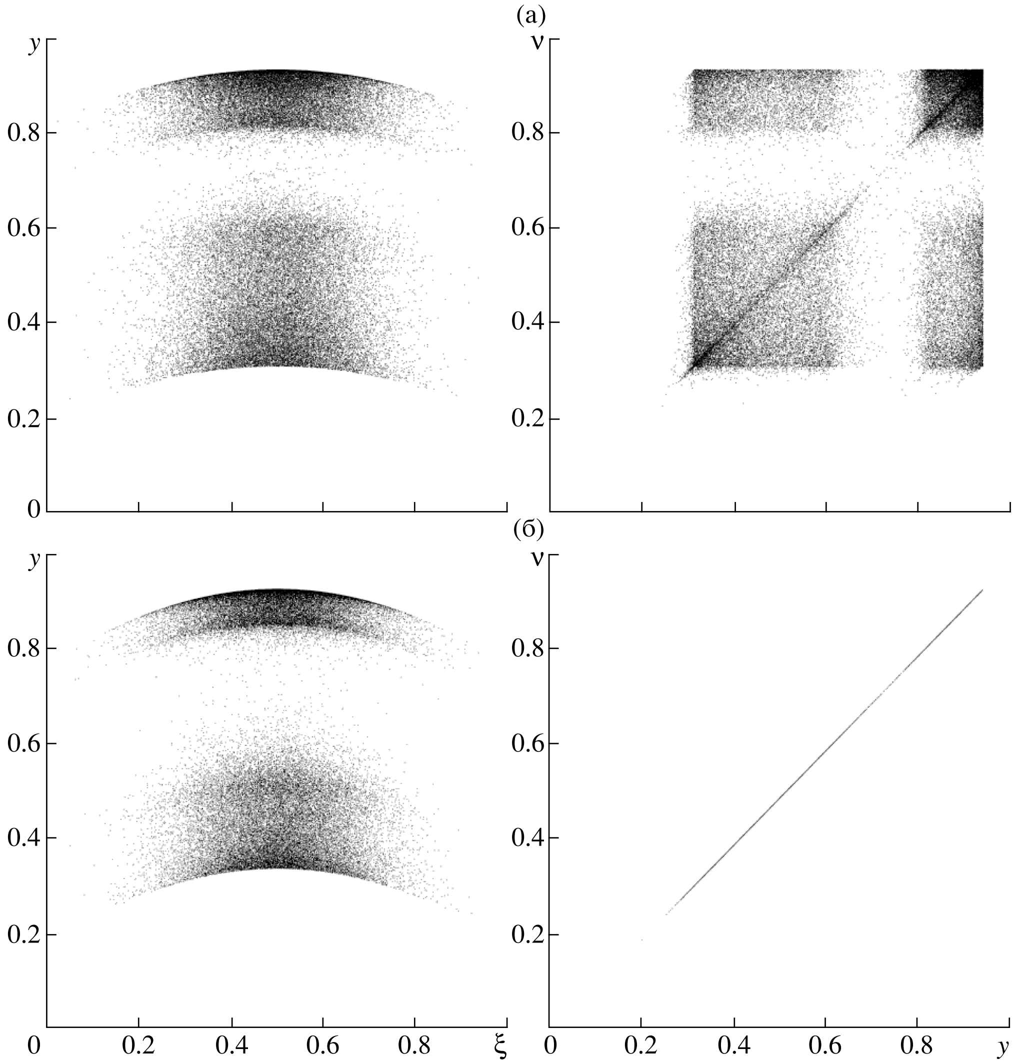

Рис. 1. Плоскости (ξ_n, y_n) и (y_n, v_n) для значения параметра связи $\varepsilon = 0.125$ (а) и $\varepsilon = 0.175$ (б). Видно, что для $\varepsilon = 0.175$ ведомая y_n и вспомогательная v_n системы демонстрируют идентичное поведение $y_n = v_n$, что свидетельствует о наличии функциональной связи $y_n = F(\xi_n)$ и соответственно установлении синхронного режима

Внешнее воздействие, наоборот, стремится усложнить поведение модифицированной системы и навязать ей свою динамику. Очевидно, что возникновение режима обобщенной синхронизации возможно только тогда, когда собственная хаотическая динамика в ведомой системе оказывается подавленной за счет диссипации.

Во-вторых, связь между ведущей и ведомой системами может быть и не диссипативной. При этом внешний сигнал ведущей системы должен иметь значительную амплитуду, так что он, как и в случае режима индуцированной шумом синхронизации, переводит изображающую точку в область фазового пространства с большим сжатием фазового потока, где в среднем имеет место сходимость соседних траекторий. В обоих случаях определяющую роль играет сжатие фазового потока, при этом условные ляпуновские экспоненты имеют отрицательные значения, и в системе также реализуется режим обобщенной синхронизации. Последнее в работах [10, 15] было проиллюстрировано на примере связанных системРесслера и Лоренца.

Таким образом, механизмы возникновения обобщенной синхронизации и синхронизации, индуцированной шумом, одинаковы, что свидетельствует о единстве этих двух типов синхронизации хаотических осцилляторов.

Покажем, что можно получить режим обобщенной синхронизации, используя в качестве сигнала, воздействующего на ведомую систему, внешний случайный сигнал, что может быть интерпретировано и как возникновение синхронизации, индуцированной шумом.

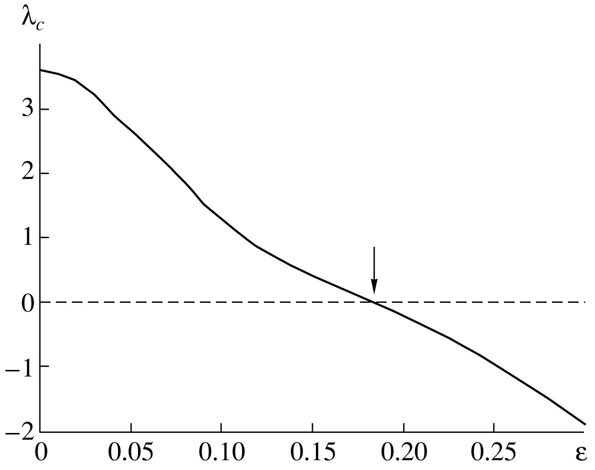

Рис. 2. Зависимость условного ляпуновского показателя λ_c системы (7) от параметра связи ε. Случайная величина ξ_n распределена по нормальному закону, момент возникновения синхронизации показан стрелкой.

В качестве модели рассмотрим систему двух однонаправленно связанных динамических систем с дискретным временем (логистических отображений), для которых в [7] было показано существование режима обобщенной синхронизации. Модель имеет вид

$$x_{n+1} = f(x_n), \quad y_{n+1} = f(y_n) + \varepsilon(f(x_n) - f(y_n)), \tag{6}$$

где $f(x) = ax(1-x)$, a – управляющий параметр, ε – параметр связи. Рассмотрим теперь случай, когда изменение величины x во времени определяется в (6) не оператором эволюции $f(x)$, а является случайным процессом ξ_n с плотностью распределения вероятности $p(\xi)$. В этом случае динамика ведомой системы будет определяться соотношением

$$y_{n+1} = f(y_n) + \varepsilon(f(\xi_n) - f(y_n)). \tag{7}$$

Покажем, что и в этом случае, несмотря на случайный характер величины ξ, между этим процессом и динамической системой может устанавливаться также синхронное поведение, аналогичное обобщенной синхронизации или синхронизации, индуцированной шумом.

Для диагностики синхронизации между случайным процессом ξ_n и динамической системой y_n воспользуемся методом вспомогательной системы. На рис. 1а показано поведение ведомой и вспомогательной систем (y_n и v_n соответственно) при $a = 3.75$, случайная величина ξ подчиняется нормальному распределению. Видно, что в случае малого параметра связи (ε = 0.125) ведомая и вспомогательная системы в один момент дискретного времени принимают разные значения, а следовательно, не существует функциональной зависимости между случайным процессом ξ_n и состоянием динамической системы y_n. С увеличением параметра связи (ε = 0.175) ситуация кардинально меняется (см. рис. 1б): точки, соответствующие состояниям систем, ложатся на диагональ $y = v$, что свидетельствует о наличии функциональной связи $y_n = F(\xi_n)$. Однако, функциональная зависимость $\mathbf{F}[\cdot]$ в этом случае имеет сложную фрактальную структуру, что соответствует случаю слабой синхронизации. Анализируя плоскость (ξ, y) невозможно установить факт наличия функциональной связи (ср. рис. 1, левая часть).

Факт существования режима обобщенной синхронизации (или синхронизации индуцированной шумом) подтверждается также зависимостью условной ляпуновской экспоненты λ_c от параметра связи ε (рис. 2). Видно, что для малых значений параметра связи λ_c положительна, что свидетельствует об отсутствии функциональной зависимости между случайной величиной ξ_n и состоянием динамической системы y_n. С увеличением параметра связи она становится отрицательной, а следовательно, имеет место функциональная зависимость $y_n = \mathbf{F}[\xi_n]$, что соответствует установлению режима обобщенной синхронизации (или синхронизации индуцированной шумом).

Аналогичные результаты получены и для потоковых систем (однонаправленно связанных системРесслера), но соответствующие данные не приводятся для экономии места.

Таким образом, режимы обобщенной хаотической синхронизации и синхронизации, индуцируемой шумом, хотя традиционно считаются различными явлениями, обусловлены, по сути дела, одной причиной – подавлением собственных хаотических колебаний с помощью дополнительного введения диссипации.

Авторы выражают благодарность П.В. Попову за помощь при выполнении численных экспериментов.

Работа выполнена при поддержке НОЦ "Нелинейная динамика и биофизика" при СГУ (REC–006 of U.S. CRDF), РФФИ (05–02–16273), ФНП "Династия" и МЦФФ (г. Москва).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Boccaletti S., Kurths J., Osipov G. et al.* // Phys. Repts. 2002. V. 366. P. 1–101.
2. *Hramov A.E., Koronovskii A.A., Popov P.V. et al.* // Chaos. 2005. V. 15. № 1. P. 013705.
3. *Rulkov N.F., Vorontsov M.A., Illing L.* // Phys. Rev. Lett. 2002. V. 89. № 27. P. 277905.
4. *Hramov A.E., Koronovskii A.A.* // Physica D. 2005. V. 206. № 3/4. P. P. 252–264.
5. *Hramov A.E., Koronovskii A.A., Kurovskaya M.K. et al.* // Phys. Rev. E. 2005. V. 71. № 5. P. 056204.

6. *Abarbanel H.D.I., Rulkov N.F., Sushchik M.* // Phys. Rev. E. 1996. V. 53. № 5. P. 4528–4535.
7. *Pyragas K.* // Phys. Rev. E. 1996. V. 54. № 5. P. R4508–R4511.
8. *Martian A., Banavar J.R.* // Phys. Rev. Lett. 1994. V. 72. № 10. P. 1451–1454.
9. *Kaulakys B., Ivanauskas F., Meskauskas T.* // Intern. J. Bifurcation and Chaos. 1999. V. 9. № 3. P. 533–539.
10. *Toral R., Mirasso C.R., Hernandez-Garsia E. et al.* // Chaos. 2001. V. 11. № 3. P. 665–673.
11. *Zhou C., Lai C.-H.* // Phys. Rev. E. 1998. V. 58. № 4. P. 5188–5191.
12. *Herzel H., Freund J.* // Phys. Rev. E. 1995. V. 52. № 3. P. 3238–3241.
13. *Cade P.M., Basu C.* // Phys. Lett. A. 1996. V. 217. № 1. P. 21–27.
14. *Rim S., Hwang D.-U., Kim I. et al.* // Phys. Rev. Lett. 2000. V. 85. № 11. P. 2304–2307.
15. *Hramov A.E., Koronovskii A.A.* // Phys. Rev. E. 2005. V. 71. № 6. P. 067201.