

09

Исследование распределения турбулентных фаз при разрушении синхронизации с запаздыванием

© А.А. Короновский, А.А. Тыщенко, А.Е. Храмов

Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
E-mail: alkor@cas.ssu.runnet.ru, aeh@cas.ssu.runnet.ru

Поступило в Редакцию 31 мая 2005 г.

Исследуется распределение турбулентных фаз во временной реализации в режиме перемежающейся lag-синхронизации. Предлагается метод определения длительности ламинарных и турбулентных фаз с помощью вейвлетного преобразования.

Синхронизация хаотических колебаний является одним из фундаментальных явлений в естествознании. Изучение этого явления представляется весьма важным, так как оно проявляется во многих физических [1,2], биологических [3–5] и других системах.

На сегодняшний день известно несколько основных типов синхронизации связанных хаотических осцилляторов [6,7]. Отметим некоторые из них. Режим полной синхронизации [8,9] характеризуется выполнением для векторов состояния взаимодействующих систем соотношения $\mathbf{x}_1(t) = \mathbf{x}_2(t)$; данное соотношение справедливо для идентичных хаотических осцилляторов. Если управляющие параметры взаимодействующих систем слегка различаются, то векторы, характеризующие состояние хаотических осцилляторов, близки друг к другу $|\mathbf{x}_1(t) - \mathbf{x}_2(t)| \approx 0$, но все-таки остаются различными. Другим видом синхронизации хаотических осцилляторов со слегка различающимися значениями управляющих параметров является lag-синхронизация [10,11]: в этом случае колебания в одной системе отстают от колебаний в другой на некоторый временной сдвиг τ ; $\mathbf{x}_2(t + \tau) \approx \mathbf{x}_1(t)$. С увеличением параметра связи между хаотическими системами временной сдвиг τ уменьшается и стремится к нулю, а соответственно синхронный режим

стремится к режиму полной синхронизации. Для определения режима фазовой синхронизации вводится в рассмотрение мгновенная фаза $\phi(t)$ хаотического сигнала [6,7,12]. Фазовая синхронизация означает, что в рассматриваемой системе связанных осцилляторов имеет место совпадение фаз хаотических сигналов, в то время как их амплитуды остаются независимыми. Переход от фазовой синхронизации к режиму lag-синхронизации сопровождается режимом перемежающейся lag-синхронизации [11,13]. В этом случае имеет смысл рассматривать в качестве исследуемого сигнала разность $(\mathbf{x}_2(t + \tau) - \mathbf{x}_1(t))$, которая в случае lag-синхронизации стремится к нулю. При режиме перемежающейся lag-синхронизации данный сигнал представляет собой последовательность случайно чередующихся регулярных (ламинарных) фаз и нерегулярных (турбулентных) всплесков; под ламинарной фазой понимается интервал времени, в течение которого выполняется соотношение $|\mathbf{x}_2(t + \tau) - \mathbf{x}_1(t)| \approx 0$. Другими словами, сигнал подвержен резким вариациям большой амплитуды. Число нерегулярных всплесков уменьшается с увеличением параметра связи. Перемежаемость в данном случае классифицируется как on-off перемежаемость [14].

При исследовании перемежаемости важную проблему представляет собой диагностика ламинарных и турбулентных фаз движения. Если для выделения ламинарных фаз существуют действенные методы (см., например [13]), то диагностика турбулентных фаз вызывает затруднения. В работе [15] для исследования перемежаемости предлагалось использовать вейвлетное преобразование [16], которое является эффективным средством анализа сложного поведения нелинейных систем (см. также [17,18]). Вейвлетное преобразование записывается как

$$W(t, s) = \frac{1}{\sqrt{s}} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t') \psi^* \left(\frac{t - t'}{s} \right) dt', \quad (1)$$

где $x(t)$ — временная реализация, $\psi(\eta)$ — базисный вейвлет (звездочка обозначает комплексное сопряжение), s — анализируемый временной масштаб. В качестве базисного вейвлета использовался Морлет-вейвлет $\psi(\eta) = \pi^{-1/4} e^{j\omega_0 \eta} e^{-\eta^2/2}$, представляющий собой быстро затухающую гармоническую функцию, $\omega_0 = 2\pi$. Было показано, что структура модуля вейвлетной поверхности $|W(t, s)|$ в области ламинарных и

турбулентных фаз движения существенно различна [15]. Поэтому, анализируя структуру вейвлетной поверхности, можно достаточно точно осуществить выделение различных фаз. Рассмотрим это на примере системы осцилляторов Ресслера, связанных двунаправленной связью [14]:

$$\begin{aligned} \dot{x}_{1,2} &= -\omega_{1,2}y_{1,2} - z_{1,2} + \varepsilon(x_{2,1} - x_{1,2}), \\ \dot{y}_{1,2} &= \omega_{1,2}x_{1,2} + ay_{1,2}, \\ \dot{z}_{1,2} &= f + z_{1,2}(x_{1,2} - c), \end{aligned} \quad (2)$$

где $\omega_1 = 0.99$, $\omega_2 = 0.95$, $a = 0.165$, $f = 0.2$, $c = 10$. При увеличении параметра связи ε в системе поочередно реализуются режимы фазовой синхронизации, lag-синхронизации и полной синхронизации. В диапазоне значений $0.1 < \varepsilon < 0.15$ (диапазон между режимами фазовой синхронизации и lag-синхронизации) реализуется режим перемежающейся lag-синхронизации. Для определения времени запаздывания τ обычно используют функцию подобия (см., например, [11,13,14]). Однако в работе [19] было показано, что τ для данной системы пропорционально фазовому сдвигу между основными спектральными компонентами фурье-спектра и в зависимости от параметра связи ε подчиняется степенному закону $\tau = k\varepsilon^{-1}$. При использовании вышеупомянутых значений управляющих параметров $k = 0.0418$. Поэтому определение времени запаздывания τ осуществлялось с помощью этого степенного закона.

На рис. 1 показана временная реализация $(x_2(t + \tau) - x(t))$ и соответствующая ей проекция модуля вейвлетной поверхности $|W(t, s)|$ при параметре связи $\varepsilon = 0.13$ ($\tau = 0.32$). Наиболее темные участки соответствуют максимумам поверхности. На проекции модуля вейвлетной поверхности четко выделяются структуры, характеризующие ламинарные и турбулентные фазы временной реализации. В режиме хаотической динамики наблюдаются максимумы вейвлетной поверхности, которые соответствуют „всплеску“ разномасштабных колебаний. Области, соответствующие турбулентным фазам, четко локализованы во времени. В пределах ламинарной фазы структура поверхности практически не меняется, а ее амплитуда минимальна.

На рис. 2, а показано усредненное распределение энергии по масштабам колебаний. Длительность временной реализации составляла $N = 2^{15}$ единиц безразмерного времени. Здесь видны два четко выражен-

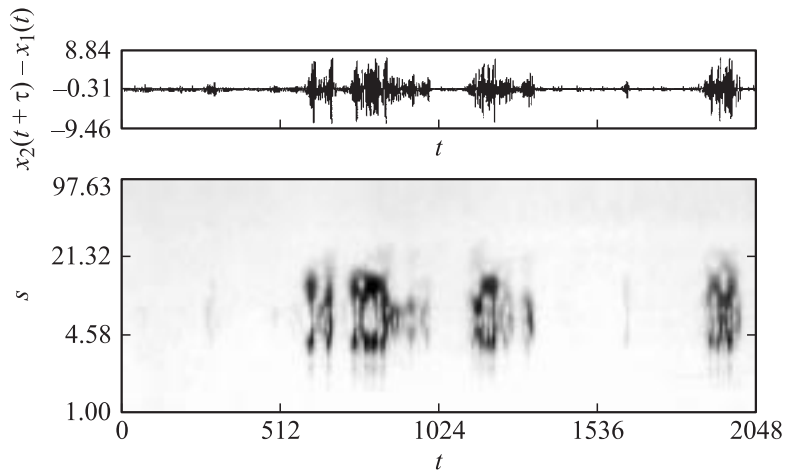


Рис. 1. Проекция модуля вейвлетной поверхности $|W(t, s)|$ для временной реализации $x_2(t + \tau) - x_1(t)$ при параметре надкритичности $\varepsilon = 0.13$ ($\tau = 0.32$).

ных максимума на временных масштабах $s_1 = 4.4$ и $s_2 = 9$. Именно эти два масштаба в среднем определяют структуру вейвлетной поверхности в турбулентной фазе. Предлагается следующий метод определения длительности ламинарных и турбулентных фаз. Строится вейвлетное преобразование $|W(t, s)|_{s=s_1, s_2}$ для двух фиксированных масштабов s_1 и s_2 , соответствующих максимумам усредненного энергетического распределения $\langle E(s) \rangle$. Для каждой из полученных вейвлетных кривых $|W(t, s_i)|$ ($i = 1, 2$) выбирается соответствующее пороговое значение Δ_i . Как уже отмечалось, амплитуда вейвлетной поверхности максимальна в турбулентной фазе. Кажется естественным, что в том случае, когда вейвлетная кривая $|W(t, s_i)|$ лежит ниже своего порогового значения Δ_i , диагностируется ламинарная фаза, выше — турбулентная. Однако возможна ситуация, когда в пределах одной турбулентной фазы амплитуда вейвлетной кривой $|W(t, s_1)|$ будет минимальна (ниже порогового значения Δ_1), а амплитуда $|W(t, s_2)|$ — выше порогового значения Δ_2 , и наоборот, т.е. в рассматриваемый момент времени масштаб s_2 является доминирующим. Это объясняется тем, что в течение всей турбулентной фазы наблюдается возбуждение и подавление колебаний в среднем

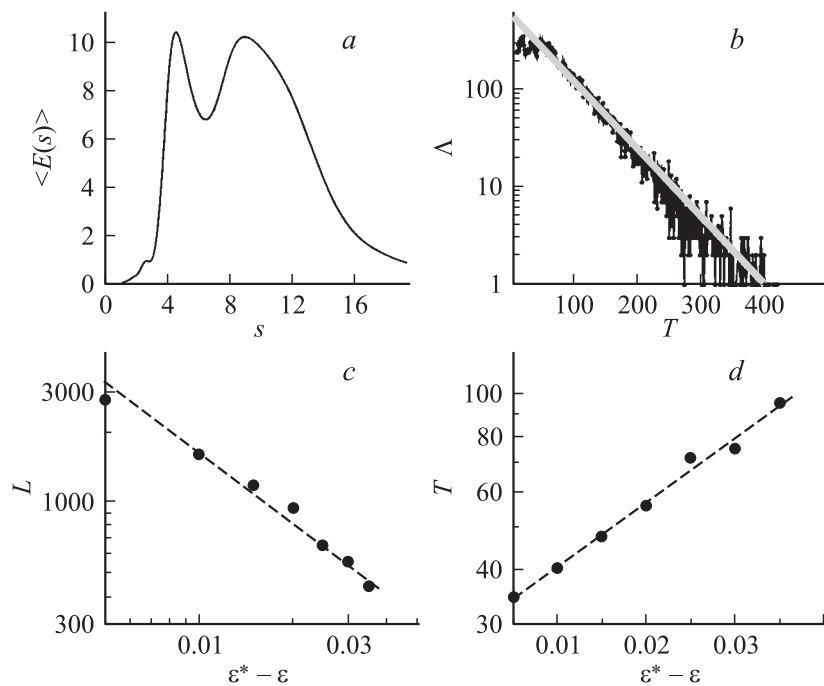


Рис. 2. *a* — усредненное распределение энергии по масштабам для параметра связи $\epsilon = 0.1$. ($\Delta_1 = 2$, $\Delta_2 = 1.5$); *b* — статистическое распределение турбулентных фаз, ось ординат приведена в логарифмическом масштабе для $\epsilon = 0.1$. Сплошная линия — экспоненциальная функция с показателем -0.015 ; *c* — зависимость средней длительности ламинарных фаз от параметра надкритичности вблизи порога возникновения режима lag-синхронизации. Пунктирная линия — степенная функция с показателем -1 , оси в двойном логарифмическом масштабе; *d* — зависимость средней длительности турбулентной фазы от параметра надкритичности. Пунктирная линия — экспоненциальная функция от $(\epsilon^* - \epsilon)$, ось ординат приведена в логарифмическом масштабе.

на этих двух временных масштабах. Поэтому для точного диагностирования ламинарной и турбулентной фаз необходимо рассматривать два временных масштаба. Соответственно ламинарная фаза диагностируется только в том случае, когда обе вейвлетные кривые $|W(t, s_i)|$

лежат ниже соответствующих пороговых значений Δ_j . Отметим, что если в исследуемой системе в усредненном распределении энергии по масштабам колебаний имеется только один четко выраженный максимум, то задача упрощается и можно рассматривать вейвлетное преобразование только на этом фиксированном масштабе.

Используя вышеописанный метод, были получены распределения ламинарных и турбулентных фаз при разрушении режима синхронизации с запаздыванием для различных значений параметра связи, а также зависимость средней длительности ламинарных и турбулентных фаз от параметра надкритичности. Статистическое распределение турбулентных фаз для $\varepsilon = 0.1$ показано на рис. 2, *b* (ось ординат показана в логарифмическом масштабе). Число анализируемых фаз составляло порядка 30 000 характерных фаз. Видно, что распределение подчиняется экспоненциальному закону с показателем -0.015 . Отметим, что аналогичное распределение для ламинарных фаз подчиняется степенному закону с показателем $-3/2$, что типично для on-off перемежаемости [13].

Были построены зависимости средней длительности ламинарных и турбулентных фаз от параметра надкритичности $(\varepsilon^* - \varepsilon)$, где $\varepsilon^* \approx 0.15$ — порог установления режима lag-синхронизации. Число фаз, по которым определялись данные характеристики, составляло порядка 600–2700 (при фиксированной длине временной реализации). При увеличении параметра связи в диапазоне $0.11 < \varepsilon < 0.15$ число турбулентных, а соответственно и ламинарных фаз резко уменьшается, ламинарные фазы становятся более длительными, а турбулентные — более короткими. На рис. 2, *c, d* представлены результаты расчета. На рис. 2, *c* показана зависимость средней длительности ламинарных фаз L от величины параметра надкритичности $(\varepsilon^* - \varepsilon)$ в двойном логарифмическом масштабе. Видно, что уменьшение средней длительности ламинарных фаз происходит пропорционально степенному закону $(\varepsilon^* - \varepsilon)^{-1}$, что характерно для on-off перемежаемости. На рис. 2, *d* изображена зависимость средней длительности турбулентных фаз T от параметра надкритичности $(\varepsilon^* - \varepsilon)$ (по оси ординат — логарифмический масштаб). Из рисунка следует, что средняя длительность турбулентных фаз T имеет тенденцию к увеличению по экспоненциальному закону с увеличением надкритичности $(\varepsilon^* - \varepsilon)$. Подчеркнем, что предложенный метод в отличие от тех, которые использовались ранее [13], позволяет легко получить результаты для длительностей турбулентных фаз.

Таким образом, в настоящей работе предложен эффективный метод исследования разрушения lag-синхронизации с помощью вейвлетного преобразования. Показано, что результаты, полученные для средних длительностей ламинарных фаз, хорошо согласуются с известными ранее [13], а распределение длительностей турбулентных фаз подчиняется экспоненциальному закону. Методика применения вейвлетного анализа, представленная для данной системы, имеет достаточно универсальный характер в плане исследования перемежаемости. Поэтому возможно использование данного метода для выделения и анализа ламинарных и турбулентных фаз во временных реализациях различных динамических систем, демонстрирующих явление перемежаемости.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 05–02–16273, 05–02–16286), Программы поддержки ведущих научных школ РФ (проект НШ-1250.2003.02), а также научно-образовательного центра „Нелинейная динамика и биофизика“ при Саратовском госуниверситете им. Н.Г. Чернышевского (грант REC–006 of U.S. Civilian Research and Development Foundation for the Independent States of the Former Soviet Union (CRDF)). Авторы благодарят также за финансовую поддержку Фонд некоммерческих программ „Династия“ и Международный центр фундаментальной физики (г. Москва).

Список литературы

- [1] *Allaria E., Arecchi F.T., Garbo A.D., Meucci R.* // Phys. Rev. Lett. 2001. V. 86(5). P. 791–794.
- [2] *Трубецков Д.И., Храмов А.Е.* // Радиотехника и электроника. 2003. V. 48(1). P. 116–124.
- [3] *Anishchenko V.S., Balanov A.G., Janson N.B., Igosheva N.B., Bordyugov G.V.* // Int. J. Bifurcation and Chaos. 2000. V. 10(10). P. 2339–2348.
- [4] *Elson R.C. et al.* // Phys. Rev. Lett. 1998. V. 81(25). P. 5692–5695.
- [5] *Rulkov N.F.* // Phys. Rev. E. 2002. V. 65. P. 041922.
- [6] *Pikovsky A., Rosenblum M., Kurths J.* Synchronization: a universal concept in nonlinear sciences. Cambridge University Press, 2001.
- [7] *Анищенко В.С., Вадивасова Т.Е., Астахов В.В.* Нелинейная динамика хаотических и стохастических систем. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 1999.
- [8] *Pecora L.M., Carroll T.L.* // Phys. Rev. A. 1991. V. 44(4). P. 2374–2383.
- [9] *Murali K., Lakshmanan M.* // Phys. Rev. E. 1994. V. 49(6). P. 4882–4885.

- [10] *Sosnovtseva O., Balanov A., Vadivasova T., Astakhov A., Mosekilde E.* // Phys. Rev. E. 1999. V. 60(6). P. 6560–6565.
- [11] *Boccaletti S., Valladares D.* // Phys. Rev. E. 2000. V. 62(5). P. 7497–7500.
- [12] *Pikovsky A., Rosenblum M., Kurths J.* // Int. J. Bifurcation and Chaos. 2000. V. 10(10). P. 2291–2305.
- [13] *Meng Zhan, Wei G.W., Lai C.-H.* // Phys. Rev. E. 2002. V. 65. P. 036202.
- [14] *Rosenblum M.G., Pikovsky A.S., Kurths J.* // Phys. Rev. Lett. 1997. V. 78(22). P. 4193–4196.
- [15] *Короновский А.А., Храмов А.Е.* // Письма в ЖТФ. 2001. Т. 27(1). С. 3–11.
- [16] *Короновский А.А., Храмов А.Е.* Непрерывный вейвлетный анализ и его приложения. М.: Физматлит, 2003.
- [17] *Hramov A., Koronovskii A.* // Chaos. 2004. V. 14(3). P. 603–610.
- [18] *Hramov A., Koronovskii A., Levin Yu.* // ЖЭТФ. 2005. Т. 127(4). С. 886–897.
- [19] *Hramov A.E., Koronovskii A.A., Kyrovskaya M.K., Moskalenko O.I.* // Phys. Rev. E. 2005. V. 71(5). P. 056204.