

## К вопросу о синхронном поведении связанных систем с дискретным временем

А. А. Короновский<sup>1)</sup>, А. Е. Храмов, А. Е. Храмова

Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, факультет нелинейных процессов  
410012 Саратов, Россия

Поступила в редакцию 25 мая 2005 г.

Рассматривается динамика двух однонаправленно связанных систем с дискретным временем. Проводится сопоставление поведения связанных логистических отображений с динамикой отображений, полученных с помощью процедуры сечения Пуанкаре из связанных систем с непрерывным временем, находящихся в режиме фазовой синхронизации. Показано, что тип поведения связанных отображений, возникающий с уменьшением параметра связи при разрушении полной синхронизации, который считался раньше асинхронным, соответствует фазовой синхронизации потоковых систем и должен рассматриваться как синхронный режим. Предложена количественная мера степени синхронности взаимодействующих систем с дискретным временем.

PACS: 05.45.Tp, 05.45.Xt

Хаотическая синхронизация является одним из фундаментальных нелинейных явлений, активно изучаемых в последнее время, имеющих также важное прикладное значение. При этом изучается синхронизация как в системах с дискретным (отображениях), так и непрерывным (потоки) временем. Несмотря на то, что оба этих класса динамических систем тесно связаны друг с другом (хорошо известно, что системы с непрерывным временем могут быть редуцированы до отображений с помощью процедуры сечения Пуанкаре), существующее различие между ними привело к тому, что явление синхронизации в них описывается с помощью разных терминов и понятий [1].

Очевидно, что разные типы синхронного поведения в потоковых системах и отображениях должны быть связаны друг с другом. Целью настоящей работы является сопоставление поведения связанных хаотических систем с непрерывным временем с динамикой связанных отображений. В частности, будет показано, что режим колебаний в связанных отображениях, который до настоящего времени считался исследователями несинхронным поведением [2], демонстрирует черты синхронизма и соответствует режиму фазовой синхронизации в потоковых системах [1, 3].

Известно, что две связанные идентичные системы с дискретным временем при большом значении параметра связи демонстрируют режим полной (идентичной) синхронизации, при котором состояния обеих

систем совпадают. Влияние неидентичности связанных парциальных систем на режим полной синхронизации рассмотрено в [4]. С уменьшением параметра связи седловые орбиты, встроенные в синхронный аттрактор связанных систем, теряют устойчивость в поперечном направлении и, в конце концов, режим полной синхронизации (или синхронизации с запаздыванием в потоках) разрушается [2, 5–7], синхронный хаотический аттрактор становится неустойчивым в поперечном направлении.

Следует отметить, что подобные явления наблюдались и для связанных потоковых систем [8, 9]. В случае взаимодействия потоковых систем со слегка различающимися параметрами режим полной синхронизации не наблюдается, а диагностируется режим синхронизации с запаздыванием (lag-синхронизация). Очевидно, что с помощью процедуры сечения Пуанкаре можно перейти от потоковых систем к дискретным отображениям, и, соответственно, в полученных таким образом отображениях будет наблюдаться полная синхронизация. Таким образом, полная и лаг-синхронизация в потоковых системах являются, по сути дела, одним типом синхронного поведения (этот вывод хорошо согласуется с результатами [10, 11]). Поэтому в дальнейшем мы не будем делать различия между режимами полной синхронизации и синхронизации с запаздыванием в потоковых системах и будем говорить о “полной синхронизации”.

С уменьшением параметра связи седловые орбиты точно так же, как и в отображениях, теряют устойчивость в поперечном направлении и, в конце кон-

<sup>1)</sup>e-mail: alkor@cas.ssu.runnet.ru

цов, режим полной синхронизации (или синхронизации с запаздыванием) в потоковых системах разрушается [8, 9]. При этом в отображениях, полученных с помощью сечения Пуанкаре, процесс разрушения синхронного режима происходит в полном соответствии с тем, как это было описано выше.

Таким образом, до момента разрушения режима полной синхронизации (включая режим синхронизации с запаздыванием в системах с потоковым временем) существует полная взаимосвязь синхронных режимов в потоках и отображениях. Следует также отметить, что и в потоках [12], и в отображениях [5] на границе разрушения режима полной синхронизации имеет место перемежающееся поведение, которое диагностируется как перемежаемость “on-off” типа и характеризуется соответствующими степенными законами с одинаковыми показателями как для систем с потоковым временем, так и для отображений.

Однако после того, как с уменьшением параметра связи режим полной синхронизации в системах с непрерывным временем разрушен, в них устанавливается режим фазовой синхронизации [12], который является частным случаем синхронизации временных масштабов [10, 11] (когда одна часть временных масштабов синхронизована, а другая — нет). В то же самое время считается, что в отображениях после разрушения режима полной синхронизации устанавливаются несинхронные колебания. Учитывая, что от систем с потоковым временем всегда можно перейти к отображениям с помощью процедуры сечения Пуанкаре, зададим следующий вопрос: “Если системы с потоковым временем демонстрируют режим фазовой синхронизации, то почему не наблюдается синхронизм поведения отображений, полученных из этих потоковых систем с помощью процедуры сечения Пуанкаре?”. Традиционно считается, что процедура сечения Пуанкаре, редуцирующая потоковые системы к отображениям, исключает из рассмотрения множество состояний систем (остаются только состояния, принадлежащие поверхности сечения) и, соответственно, по оставшимся данным невозможно установить наличие синхронизма, и динамика отображений носит несинхронный характер.

Покажем, однако, что отображения, полученные с помощью сечения Пуанкаре из потоковых систем, находящихся в режиме фазовой синхронизации, несут на себе “отпечаток” синхронной динамики, а следовательно, их поведение должно рассматриваться как синхронное. Более того, поскольку другие дискретные отображения (например, логистические) демонстрируют такое же поведение, как и отображения,

полученные с помощью процедуры сечения Пуанкаре из систем с потоковым временем, то и их динамика (традиционно считавшаяся несинхронной) демонстрирует черты синхронного поведения и должна рассматриваться как синхронный режим. В качестве модельных примеров используем однонаправленно связанные системы Ресслера со слегка расстроенными параметрами:

$$\begin{aligned} \dot{x}_d &= -\omega_d y_d - z_d, & \dot{x}_r &= -\omega_r y_r - z_r + \varepsilon(x_d - x_r), \\ \dot{y}_d &= \omega_d x_d + a y_d, & \dot{y}_r &= \omega_r x_r + a y_r, \\ \dot{z}_d &= p + z_d(x_d - c), & \dot{z}_r &= p + z_r(x_r - c). \end{aligned} \quad (1)$$

где параметр  $\varepsilon$  характеризует величину связи между осцилляторами, а значения управляющих параметров были выбраны по аналогии с работой [13]:  $a = 0.15$ ,  $p = 0.2$ ,  $c = 10.0$ ,  $\omega_r = 0.95$ ,  $\omega_d = 0.93$  и логистические отображения

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= f(x_n, \lambda_x), \\ y_{n+1} &= f(y_n, \lambda_y) + \varepsilon(f(x_n, \lambda_x) - f(y_n, \lambda_y)), \end{aligned} \quad (2)$$

где  $\varepsilon$ , по-прежнему, параметр связи,  $f(x, \lambda) = \lambda x(1 - x)$ ,  $\lambda_x = 3.75$ ,  $\lambda_y = 3.79$ . Связанные ведущая и ведомая системы с потоковым временем (1) редуцировались к связанным двумерным отображениям

$$\begin{aligned} x_{d,n+1} &= F_x(x_{d,n}, z_{d,n}, \omega_d), \\ z_{d,n+1} &= F_z(x_{d,n}, z_{d,n}, \omega_d), \\ x_{r,n+1} &= G_x(x_{r,n}, z_{r,n}, x_{d,n}, z_{d,n}, \omega_d), \\ z_{r,n+1} &= G_z(x_{r,n}, z_{r,n}, x_{d,n}, z_{d,n}, \omega_d, \varepsilon), \end{aligned} \quad (3)$$

с помощью сечения фазового потока поверхностями Пуанкаре  $y_d = 0$ ,  $\dot{y}_d < 0$  и  $y_r = 0$ ,  $\dot{y}_r < 0$ , соответственно.

Критерием синхронизма в связанных отображениях является тот факт, ложатся ли точки на плоскости  $(x_n, y_n)$  на диагональ  $y_n = x_n$  (где  $x_n$  и  $y_n$  — состояния взаимодействующих отображений в  $n$ -й момент дискретного времени). Если поведению связанных отображений соответствует диагональ  $y = x$  на плоскости  $(x_n, y_n)$ , то в системе реализуется режим полной синхронизации, если же точки “разбросаны” по этой плоскости, то режим считается несинхронным. Рассмотрим плоскость  $(x_{d,n}, x_{r,n})$  отображений (3), полученных из потоковых систем (1) с помощью процедуры сечения Пуанкаре для различных значений параметра связи  $\varepsilon$  (рис. 1а). Видно, что для силы связи  $\varepsilon = 0.015$ , когда фазовая синхронизация отсутствует (порог возникновения фазовой синхронизации для выбранных значений управляющих

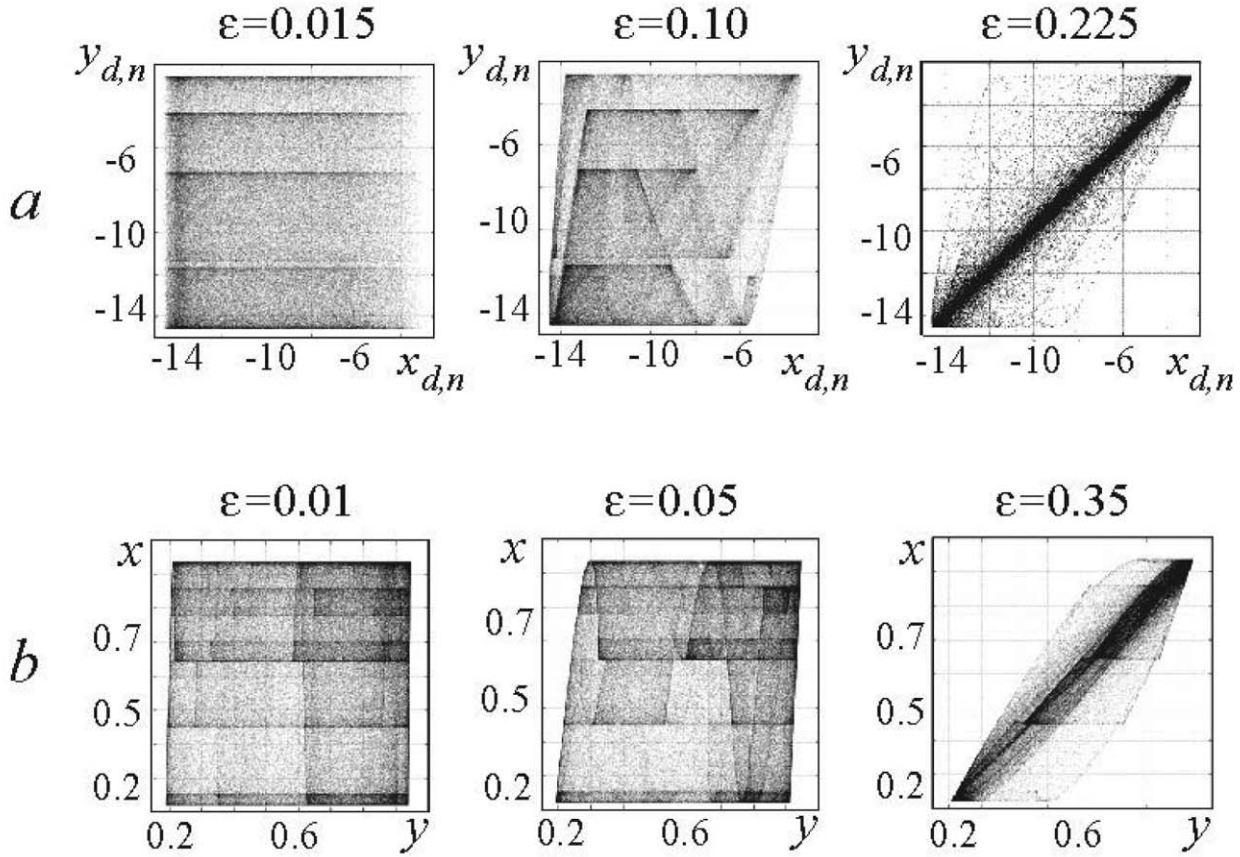


Рис.1. (а) Плоскость  $(x_{d,n}, x_{r,n})$ , характеризующая поведение однонаправленно связанных отображений (3), полученных редукцией систем Ресслера (1). Значение параметра связи  $\varepsilon = 0.015$  соответствует случаю отсутствия режима фазовой синхронизации, а значения  $\varepsilon = 0.10$  и  $\varepsilon = 0.225$  – режиму фазовой синхронизации. (б) Плоскость  $(x, y)$  для логистических отображений (2) для разных значений параметра связи

параметров  $\varepsilon_p \approx 0.04$ ), точки равномерно заполняют квадрат на плоскости  $(x_{d,n}, x_{r,n})$ . В том случае, если в системе реализуется фазовая синхронизация ( $\varepsilon = 0.10$  и  $\varepsilon = 0.225$ ), точки заполняют на плоскости  $(x_{d,n}, x_{r,n})$  уже некоторую область, имеющую форму неправильного четырехугольника, вытянутого вдоль диагонали  $x_r = x_d$ , причем площадь этой области оказывается тем меньше, чем больше параметр связи. Площадь области  $S$ , покрываемой точками на  $(x_{d,n}, x_{r,n})$ -плоскости, зависит от величины связи:  $S = S(\varepsilon)$ ; она максимальна при отсутствии связи и стремится к нулю (площадь диагонали) в случае режима полной синхронизации. Таким образом, можно ввести в рассмотрение геометрическую меру

$$\sigma(\varepsilon) = \frac{S(0) - S(\varepsilon)}{S(0)}, \quad (4)$$

характеризующую степень синхронности взаимодействующих систем, где  $S(\varepsilon)$  – площадь области, покрываемой точками на плоскости  $(x_{d,n}, x_{r,n})$  для фиксированного значения параметра связи  $\varepsilon$ . Для отображений (3) зависимость  $\sigma(\varepsilon)$  приведена на рис.2а.

Нетрудно видеть, что  $\sigma(\varepsilon)$  близка к нулю при отсутствии фазовой синхронизации, возрастает с увеличением параметра связи в диапазоне значений, соответствующих режиму фазовой синхронизации, и стремится к единице для режима полной синхронизации. Важно отметить, что поведение геометрической меры синхронности взаимодействующих систем соответствует энергетической мере синхронизации, введенной в рассмотрение в [10]. Таким образом, даже на основе анализа поведения отображений, полученных с помощью процедуры сечения Пуанкаре, можно сделать вывод о наличии синхронного поведения в системе, несмотря на то, что значительная часть информации о поведении систем с потоковым временем исключена из рассмотрения.

Рассмотрим теперь поведение однонаправленно связанных отображений (2). Понятно, что в данном случае не существует исходной потоковой системы, как в вышерассмотренном примере, поэтому невозможно установить наличие (или отсутствие) режима фазовой синхронизации. Тем не менее, поведение связанных систем с дискретным временем полнос-

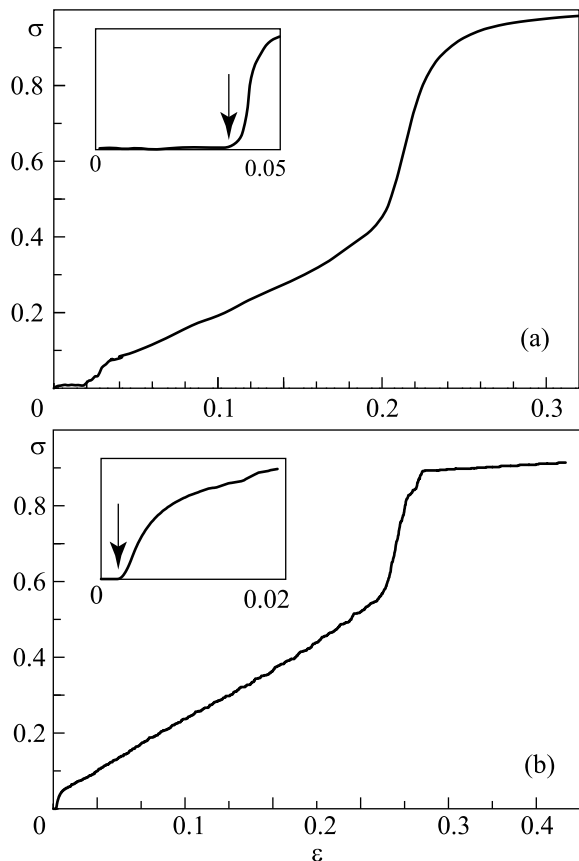


Рис.2. Зависимость геометрической меры синхронизации  $\sigma(\epsilon)$  (a) для отображений (3), полученных редуцированием систем Ресслера (1) с помощью процедуры сечения Пуанкаре и (b) для логистических отображений (2). На врезках приведены увеличенные фрагменты зависимости  $\sigma(\epsilon)$  вблизи нуля. Момент возникновения режима фазовой синхронизации в системах Ресслера и соответствующая точка для связанных отображений показаны стрелками

тью аналогично поведению отображений (3), полученных редуцированием систем Ресслера (см. рис.1b и 2b). Точно так же фигура, покрытая точками на плоскости  $(x_n, y_n)$  имеет форму неправильного четырехугольника, вытянутого вдоль диагонали  $x = y$ , ее площадь уменьшается с увеличением параметра связи  $\epsilon$ , а геометрическая мера синхронизации  $\sigma(\epsilon)$  монотонно возрастает в некотором диапазоне значений параметра  $\epsilon$  и стремится к единице в случае полной синхронизации. Важно также отметить наличие некоторого диапазона  $[0, \epsilon_p]$  значений параметра связи, на котором величина  $\sigma(\epsilon)$  равна нулю, что соответствует в отображениях, полученных редуцированием потоковых систем, несинхронному поведению (см. врезки на рис.2a и b).

Таким образом, на основании проведенного рассмотрения следует сделать вывод о том, что свя-

занные системы с дискретным временем, с уменьшением параметра связи между ними после разрушения режима полной синхронизации демонстрируют не асинхронную динамику, как это считалось до сих пор, а синхронное поведение, которое соответствует режиму фазовой синхронизации в слабо неидентичных потоковых системах. Предложенная геометрическая мера степени синхронности позволяет четко разделить несинхронное поведение отображений от режима синхронизации, соответствующей режиму фазовой синхронизации связанных потоковых систем. Предложенный подход может быть использован для диагностирования режима фазовой синхронизации в связанных системах с потоковым временем.

Работа выполнена при поддержке гранта Министерства образования и науки РФ по программе “Развитие научного потенциала высшей школы” (проект # 333), Российского фонда фундаментальных исследований (проекты # 05-02-16273), Программы поддержки ведущих научных школ РФ (проект НШ-1250.2003.02), а также научно-образовательного центра “Нелинейная динамика и биофизика” при Саратовском госуниверситете им. Н.Г. Чернышевского (грант # CRDF REC-006). Авторы благодарят также за финансовую поддержку Фонд некоммерческих программ “Династия” и Международный центр фундаментальной физики (г. Москва).

1. S. Boccaletti, J. Kurths, G. Osipov et al., *Physics Reports* **366**, 1 (2002).
2. V. Astakhov, A. Shabunin, T. Kapitaniak et al., *Phys. Rev. Lett.* **79**, 1014 (1997).
3. M. G. Rosenblum, A. S. Pikovsky, and J. Kurths, *Phys. Rev. Lett.* **76**, 1804 (1996).
4. V. Astakhov, M. Hasler, T. Kapitaniak et al., *Phys. Rev. E* **58**, 5620 (1998).
5. P. Ashwin, J. Buescu, and I. Stewart, *Nonlinearity* **9**, 703 (1996).
6. S. C. Venkataramani, B. R. Hunt, and E. Ott, *Phys. Rev. E* **54**, 1346 (1996).
7. E. Ott and J. C. Sommerer, *Phys. Lett. A* **188**, 39 (1994).
8. O. V. Sosnovtseva, A. G. Balanov, T. E. Vadivasova et al., *Phys. Rev. E* **60**, 6560 (1999).
9. D. Pazó, M. Zaks, and J. Kurths, *Chaos* **13**, 309 (2002).
10. A. E. Hramov and A. A. Koronovskii, *Chaos* **14**, 603 (2004).
11. A. E. Hramov, A. A. Koronovskii, M. K. Kurovskaya et al., *Phys. Rev. E* **71**, 056204 (2005).
12. M. G. Rosenblum, A. S. Pikovsky, and J. Kurths, *Phys. Rev. Lett.* **78**, 4193 (1997).
13. Z. Zheng and G. Hu, *Phys. Rev. E* **62**, 7882 (2000).