

УДК 517.9

АНАЛИЗ ХАОТИЧЕСКОЙ СИНХРОНИЗАЦИИ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ПЛОХО ОПРЕДЕЛЕННОЙ ФАЗОЙ

© 2005 г. А. А. Короновский, А. Е. Храмов

Поступила в редакцию 05.11.2003 г.

Рассмотрена синхронизация двух хаотических динамических систем с плохо определенной фазой. Предложен новый метод введения фазы хаотического сигнала, основанный на непрерывном вейвлетном преобразовании.

Фазовая синхронизация [1, 2] систем, находящихся в режиме динамического хаоса, является одним из важнейших явлений современной теории нелинейных колебаний. Явление фазовой синхронизации экспериментально наблюдалось для радиотехнических генераторов [3], лазеров [4, 5], электрохимических осцилляторов [6], сердечного ритма [7], газового разряда [8, 9], солнечной активности [10] и т.д. (см. также обзоры [11–14]).

Для описания и анализа фазовой синхронизации вводится фаза $\Phi(t)$ хаотического сигнала [1, 2, 11–14]. Фазовая синхронизация означает, что происходит захват фаз хаотических сигналов, в то время как амплитуды этих сигналов остаются независимыми друг с другом и выглядят хаотически. Захват фаз влечет за собой совпадение частот сигналов. Частота хаотического сигнала определяется как средняя скорость изменения фазы $\langle \dot{\Phi}(t) \rangle$.

В настоящее время нет универсального способа введения фазы хаотического сигнала, который бы давал корректные результаты для любых динамических систем. Так, существует несколько способов введения фазы, подходящих для “хороших” систем с простой топологией хаотического аттрактора. Прежде всего, фаза Φ хаотического сигнала может быть введена как угол в полярной системе координат на плоскости (x, y) [15, 16]

$$\Phi = \arctg \frac{y}{x}, \quad (1)$$

но при этом все траектории проекции хаотического аттрактора на плоскости (x, y) должны вращаться вокруг начала координат. Иногда возможно использовать преобразование координат, чтобы получить подходящую для введения фазы проекцию [13, 15].

Другим способом определения фазы для хаотической динамической системы является введение в рассмотрение аналитического сигнала [1, 11]

$$\zeta(t) = x(t) + j\tilde{x}(t) = A(t)\exp(j\Phi(t)), \quad (2)$$

где функция $\tilde{x}(t)$ является преобразованием Гильберта временной реализации $x(t)$

$$\tilde{x}(t) = \frac{1}{\pi} \text{P.V.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x(\tau)}{t-\tau} d\tau \quad (3)$$

(P.V. в соотношении (3) означает, что интеграл вычисляется в смысле главного значения). Соответственно, фаза $\Phi(t)$ хаотического сигнала $x(t)$ определяется из соотношений (2) и (3).

Наконец, для определения фазы хаотического сигнала может быть использована поверхность сечения Пуанкаре [1, 11], так что фаза определяется как

$$\Phi(t) = 2\pi \frac{t-t_n}{t_{n+1}-t_n} + 2\pi n, \quad t_n \leq t \leq t_{n+1}, \quad (4)$$

где t_n – момент времени, соответствующий n -му пересечению поверхности сечения Пуанкаре фазовой траекторией.

Все описанные выше подходы дают сходные корректные результаты для “хороших” систем [15]. В то же время эти методы часто приводят к некорректным результатам для систем с плохо определенной фазой (см., например, [13, 17]). Вследствие этого фазовая синхронизация подобных систем, как правило, может быть выявлена с помощью косвенных наблюдений [15, 18] и измерений [19].

В данной работе рассматривается новый метод выявления режима фазовой синхронизации динамических систем с плохо определенной фазой. Поведение таких систем может быть охарактеризовано с помощью *непрерывного множества фаз*, которое может быть определено с помощью непрерывного вейвлетного преобразования [20, 21] хаотической временной реализации $x(t)$

$$W(s, t_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \psi_{s, t_0}^*(t) dt, \quad (5)$$

где $\Psi_{s,t_0}(t)$ – вейвлетная функция, получающаяся из материнского вейвлета $\Psi_0(t)$:

$$\Psi_{s,t_0}(t) = \frac{1}{\sqrt{s}} \Psi\left(\frac{t-t_0}{s}\right). \quad (6)$$

Временной масштаб s определяет ширину вейвлета $\Psi_{s,t_0}(t)$, t_0 – временной сдвиг вейвлетной функции вдоль оси времени, символ “*” в соотношении (5) означает комплексное сопряжение. Следует отметить, что при проведении вейвлетного анализа понятие “временной масштаб”, как правило, используется вместо понятия “частота”, традиционного для фурье-преобразования.

В качестве материнского вейвлета был использован морлет-вейвлет [22]

$$\Psi_0(\eta) = \frac{1}{\sqrt[4]{\pi}} \exp(j\omega_0\eta) \exp\left(-\frac{\eta^2}{2}\right) \quad (7)$$

Выбор значения параметра вейвлета $\omega_0 = 2\pi$ обеспечивает соотношение $s = f$ между временным масштабом s вейвлетного преобразования и частотой f преобразования Фурье.

Вейвлетная поверхность

$$W(s, t_0) = |W(s, t_0)| \exp(j\Phi_s(t_0)) \quad (8)$$

характеризует поведение системы на каждом временном масштабе s в любой момент времени t_0 . Величина $|W(s, t_0)|$ характеризует наличие и интенсивность соответствующего временного масштаба s в момент времени t_0 . Как правило, в рассмотрение также вводят мгновенное

$$E(s, t_0) = |W(s, t_0)|^2 \quad (9)$$

и интегральное

$$\langle E(s) \rangle = \int |W(s, t_0)|^2 dt_0 \quad (10)$$

распределения энергии по временным масштабам.

Используя вейвлетное преобразование, можно определить фазу $\Phi_s(t) = \arg W(s, t)$ для каждого временного масштаба s . Иными словами, оказывается возможным характеризовать поведение каждого временного масштаба s с помощью ассоциированной с ним фазы $\Phi_s(t)$. Введенное в рассмотрение таким образом семейство фаз наиболее полным образом характеризует поведение связанных систем.

Рассмотрим поведение двух взаимно связанных неидентичных хаотических осцилляторов. Если рассматриваемые осцилляторы не находятся в режиме фазовой синхронизации, то их поведение является несинхронизованным на всех временных масштабах s . Как только какие-либо из временных масштабов рассматриваемых динамических систем синхронизируются (например, при

увеличении параметра связи между системами), возникает режим фазовой синхронизации. Остальные временные масштабы по-прежнему остаются рассинхронизованными. Возникновение режима фазовой синхронизации означает появление захвата фаз на синхронизованных временных масштабах s

$$|\Phi_{s1}(t) - \Phi_{s2}(t)| < \text{const}. \quad (11)$$

Здесь $\Phi_{s1,2}(t)$ – непрерывные фазы первого и второго осцилляторов, соответствующие синхронизованным временным масштабам s .

С увеличением параметра связи между связанными динамическими системами все больше временных масштабов оказываются синхронизованными. Возникновение режима lag-синхронизации [16] между осцилляторами означает, что все временные масштабы s двух рассматриваемых систем стали синхронизованными. Действительно, из условия lag-синхронизации $x_1(t-\tau) \approx x_2(t)$ следует, что $W_1(s, t-\tau) \approx W_2(t, s)$ и, соответственно, $\Phi_{s1}(t-\tau) \approx \Phi_{s2}(t)$. Очевидно, что в этом случае для всех временных масштабов s должно выполняться условие захвата фаз (11).

Дальнейшее увеличение параметра связи [16] ведет к уменьшению временного запаздывания τ . Осцилляторы стремятся к режиму полной синхронизации $x_1(t) \approx x_2(t)$, вследствие чего разность фаз $(\Phi_{s1}(t) - \Phi_{s2}(t))$ стремится к нулю для всех временных масштабов.

Следует отметить, что на некоторых временных масштабах s фаза $\Phi_s(t)$, введенная с помощью вейвлетного преобразования, ведет себя немонотонным образом: в среднем нарастая (или убывая) с течением времени, зависимость $\Phi_s(t)$ имеет локальные максимумы и минимумы, что связано с влиянием спектральных компонент, соответствующих соседним временным масштабам. Тем не менее, немонотонность изменения фазы $\Phi_s(t)$ с течением времени для некоторых временных масштабов s никоим образом не препятствует выявлению существования режима фазовой синхронизации. Более того, фаза хаотического сигнала $\Phi(t)$, вводимая с помощью традиционных методов, также может вести себя немонотонным образом (см., например, [17]).

Предложенный подход, основанный на введении семейства фаз $\Phi_s(t)$ с помощью непрерывного вейвлетного преобразования, может быть с успехом применен к любым динамическим системам, в том числе и к системам с плохо определенной фазой.

В качестве первого примера рассмотрим поведение двух взаимно связанных неидентичных сис-

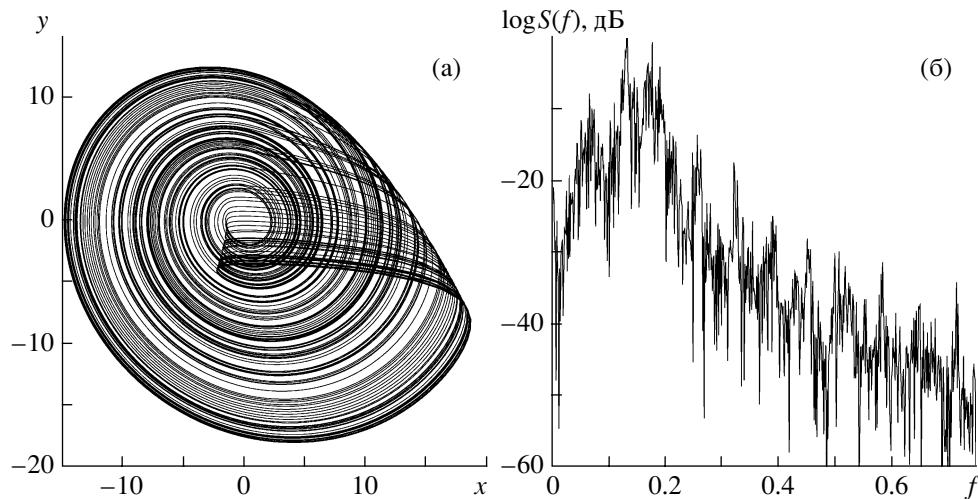


Рис. 1. Проекция фазового портрета на плоскость (x, y) (а) и спектр мощности для первой системы Ресслера (б). Параметр связи $\varepsilon = 0$.

тем Ресслера, находящихся в режиме винтового хаоса (рис. 1):

$$\begin{aligned} \dot{x}_{1,2} &= -\omega_{1,2}y_{1,2} - z_{1,2} + \varepsilon(x_{2,1} - x_{1,2}), \\ \dot{y}_{1,2} &= \omega_{1,2}x_{1,2} + ay_{1,2} + \varepsilon(y_{2,1} - y_{1,2}), \\ \dot{z}_{1,2} &= p + z_{1,2}(x_{1,2} - c), \end{aligned} \quad (12)$$

где ε – параметр связи, $\omega_1 = 0.98$, $\omega_2 = 1.03$. Значения управляющих параметров по аналогии с [19] были выбраны следующими: $a = 0.22$, $p = 0.1$, $c = 8.5$.

Рис. 2, а иллюстрирует поведение двух связанных систем Ресслера в том случае, когда параметр связи достаточно мал ($\varepsilon = 0.025$). Спектры мощности вейвлетного преобразования $\langle E(s) \rangle$ отличаются друг от друга для первой и второй систем, однако максимальное значение энергии в обоих случаях приходится примерно на один и тот же временной масштаб s . Очевидно, что в этом случае разность фаз $\Phi_{s1}(t) - \Phi_{s2}(t)$ растет неограниченно на всех временных масштабах (см. рис. 2, а). Это означает, что в рассматриваемых системах не существует таких временных масштабов, которые были бы синхронизованы друг с другом, а соответственно, и сами системы являются несинхронизованными.

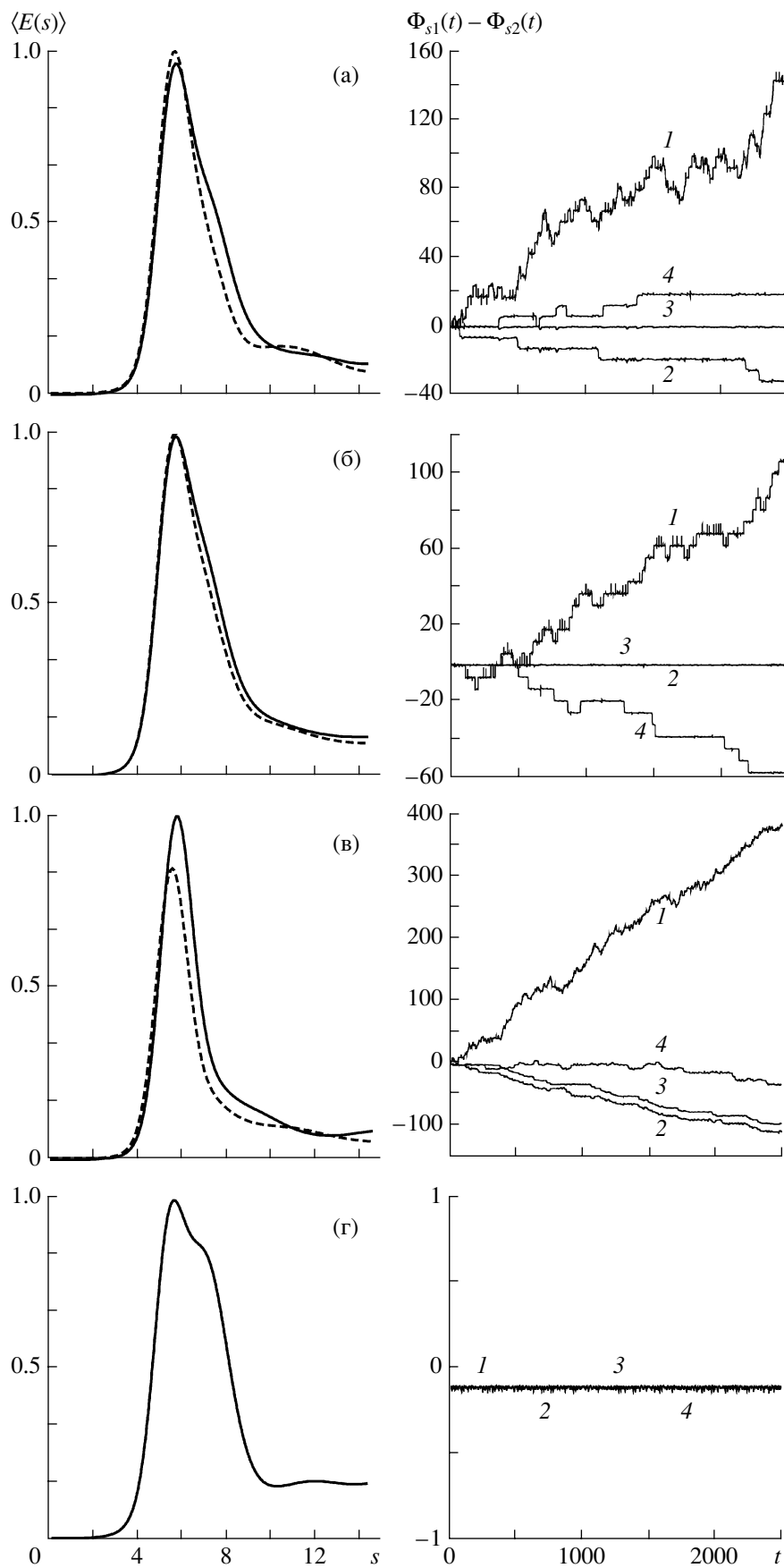
При увеличении значения параметра связи системы переходят в режим фазовой синхронизации (см., например, работу [16]). В [19] с помощью косвенных измерений было показано, при величине параметра связи $\varepsilon = 0.05$ две связанные системы Ресслера находятся в режиме фазовой синхронизации.

Поведение разности фаз $\Phi_{s1}(t) - \Phi_{s2}(t)$ для данного случая представлено на рис. 2, б. Видно, что на временном масштабе $s = 5.25$, который характеризуется наибольшим значением энергии в

вейвлетном спектре $\langle E(s) \rangle$ (см. рис. 2, б), наблюдается захват фаз. Таким образом, можно сказать, что временные масштабы $s = 5.25$ двух систем Ресслера оказываются синхронизованными друг с другом. Одновременно все близлежащие к $s = 5.25$ временные масштабы также синхронизованы. Важно также отметить, что сильно отличающиеся временные масштабы (например, такие как $s = 4.5$, 6.0 и др.) остаются несинхронизованными, и для этих масштабов явления захвата фаз не наблюдается (см. рис. 2, б и ср. с рис. 2, а).

С дальнейшим увеличением параметра связи (например, при $\varepsilon = 0.07$) временные масштабы, бывшие ранее несинхронизованными, синхронизируются (см. рис. 2, в). Видно, что, например, временные масштабы $s = 4.5$ в обеих системах синхронизованы друг с другом, в отличие от предыдущего случая ($\varepsilon = 0.05$, рис. 2, б) когда они были несинхронизованы. Количество временных масштабов, на которых наблюдается захват фаз, увеличивается, но в то же время некоторые временные масштабы (например, $s = 3.0$ и $s = 6.0$) остаются несинхронизованными, как и ранее.

Когда значение параметра связи становится достаточно большим (например, $\varepsilon = 0.25$), в связанных системах реализуется режим lag-синхронизации. В этом случае вейвлетные спектры обеих систем совпадают друг с другом (см. рис. 2, г) и захват фаз наблюдается на всех временных масштабах s . При этом важно отметить, что разность фаз для случая lag-синхронизации не равна нулю и обуславливается величиной временного запаздывания τ . По мере увеличения параметра связи ε разность фаз $\Phi_{s1}(t) - \Phi_{s2}(t)$ (так же как и время запаздывания τ) уменьшается и стремится к нулю. Соответственно, режим фазовой синхронизации сменяется режимом полной синхронизации.



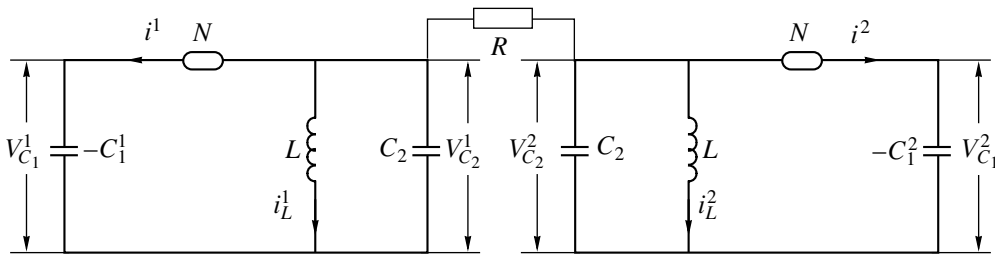


Рис. 3. Два взаимосвязанных генератора “TORUS”.

В качестве второго примера рассмотрим два связанных радиотехнических генератора с кусочно-линейной характеристикой. Этот генератор, впервые описанный в работе [23] и принадлежащий к семейству схем Чуа, представляет собой простую радиотехническую систему третьего порядка (рис. 3), состоящую из индуктивности, емкостей и нелинейного элемента, имеющего кусочно-линейную вольт-амперную характеристику. Важной особенностью данной системы является наличие в ней двух характерных временных масштабов (двух характерных частот), что приводит при выборе соответствующих значений управляющих параметров к квазипериодическим колебаниям [24, 25]. Соответственно, в этом случае в фазовом пространстве поведению системы соответствует двумерный тор, что и дало название этой системе – генератор “TORUS”. Кроме того, в системе могут реализовываться периодические колебания (в фазовом пространстве им соответствуют резонансные циклы), а также хаотические колебания [26, 27].

Связанные генераторы описываются следующими безразмерными дифференциальными уравнениями:

$$\begin{aligned} \dot{x}_{1,2} &= -\frac{\alpha_{1,2}}{\gamma} f(y_{1,2} - x_{1,2}), \\ \dot{y}_{1,2} &= -\frac{1}{\gamma} (f(y_{1,2} - x_{1,2}) + z_{1,2}) + \frac{\varepsilon}{\gamma} (y_{2,1} - y_{1,2}), \\ \dot{z}_{1,2} &= \gamma y_{1,2}, \end{aligned} \quad (13)$$

где $x_{1,2} = V_{C_1}^{1,2}/E$, $y_{1,2} = V_{C_2}^{1,2}/E$ – безразмерные напряжения на емкостях $C_1^{1,2}$ и C_2 первого и второго генераторов соответственно, E – параметр нормировки [24, 27]. В качестве безразмерных парамет-

ров выступают $\alpha_{1,2} = C_2/C_1^{1,2}$ и $\gamma = \frac{1}{m_1} \sqrt{C_2/L}$, $\tau = t/\sqrt{LC_2}$ – безразмерное время. Функция $f(\xi)$ является безразмерной вольт-амперной характеристикой нелинейного элемента N и определяется как

$$f(\xi) = \frac{m_0}{m_1} \xi + \frac{1}{2} \left(\frac{m_0}{m_1} \right) (|\xi + 1| - |\xi - 1|),$$

где m_0 и m_1 – проводимости соответствующих ветвей кусочно-линейной вольт-амперной характеристики элемента N (см. [24, 27]). Параметр связи $\varepsilon = 1/Rm_1$ определяет степень влияния рассматриваемых генераторов друг на друга, для случая несвязанных систем ($R = \infty$) параметр связи равен нулю.

Значения управляющих параметров были выбраны $\alpha_1 = 2.78$, $\alpha_2 = 2.89$ и $\gamma = 3.00$. При выбранных значениях управляющих параметров в обеих системах в автономном режиме наблюдаются хаотические колебания (проекции фазовых портретов и спектр мощности для колебаний первого автогенератора приведены на рис. 4), малая расстройка параметров α_1 и α_2 обуславливает слабую неидентичность рассматриваемых подсистем.

Как уже говорилось выше, характерной особенностью рассматриваемого генератора является наличие двух характерных временных масштабов (двух спектральных компонент $f_a \approx 0.161$ и $f_b \approx 0.032$), обуславливающих поведение системы (рис. 4, в). Соответственно, вейвлетные спектры колебаний имеют максимумы на соответствующих временным масштабам $s_a = 1/f_a \approx 6.2$ и $s_b = 1/f_b \approx 30.0$. При этом динамика автогенераторов может быть синхронизована на одной частоте (на одном временном масштабе) и не синхронизована на другой. Установить наличие режима фазовой

Рис. 2. Нормированный энергетический спектр $\langle E(s) \rangle$ вейвлетного преобразования для первой (сплошная кривая) и второй (штриховая кривая) систем Ресслера (слева), а также разность фаз $\Phi_{s1}(t) - \Phi_{s2}(t)$ для двух связанных систем Ресслера (справа); (а) $\varepsilon = 0.025$; режим синхронизации отсутствует; (б) $\varepsilon = 0.05$, временные масштабы $s = 5.25$ синхронизованы друг с другом, в системах реализуется режим фазовой синхронизации; (в) $\varepsilon = 0.07$; (г) $\varepsilon = 0.25$, все временные масштабы синхронизованы, в системах реализуется режим lag-синхронизации. Кривая $1 - s = 3.0$ (а-г), $2 - s = 4.5$ (а-г), $3 - s = 5.25$ (а-г), $4 - s = 6.5$ (а), 6.0 (б-г).

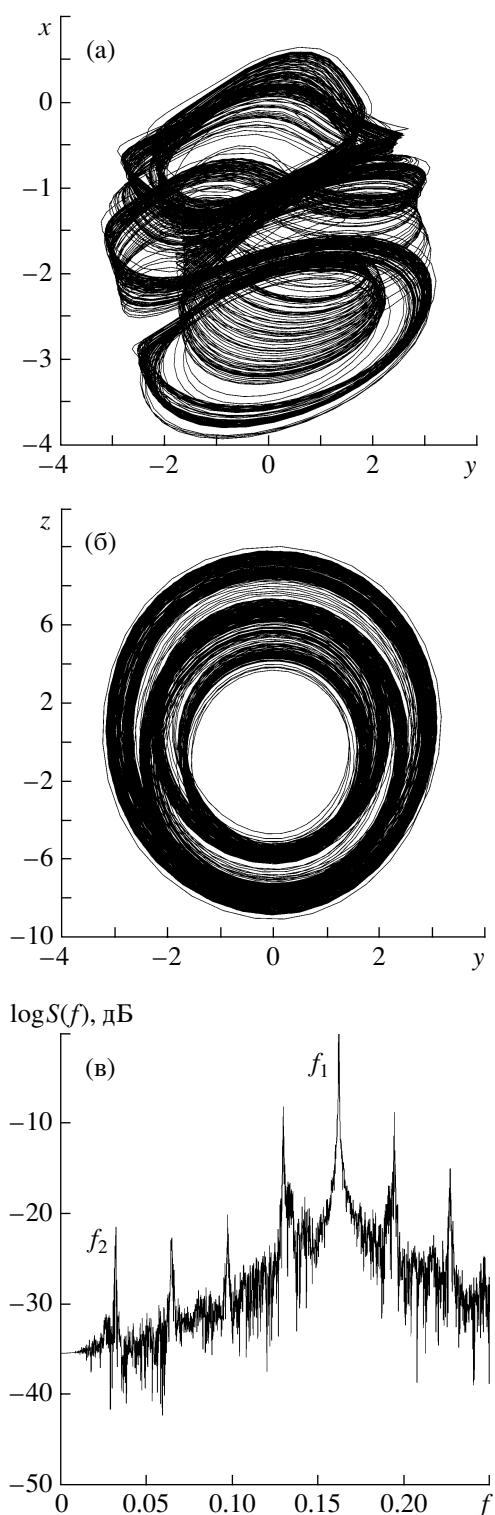


Рис. 4. Проекция фазовых портретов на плоскость (y, x) (а) и (y, z) (б) для первого генератора "TORUS" (значения управляющих параметров $\alpha_1 = 2.78$, $\gamma = 3.0$, параметр связи $\epsilon = 0$). Спектр хаотического сигнала (в), построенный по временной реализации y -координаты, полученный при тех же самых значениях управляющих параметров.

синхронизации на частоте f_a (см. рис. 4, в) с помощью традиционных методов достаточно легко, поскольку проекция хаотического аттрактора на плоскость (y, z) (см. рис. 4, б) допускает введение фазы хаотического сигнала $\Phi(t)$ (например, с помощью (1)), которая определяется динамикой системы именно на этой частоте. Однако, используя традиционные подходы, ничего нельзя сказать о том, синхронизовано ли поведение связанных автогенераторов на втором характерном временном масштабе, поскольку введенная в рассмотрение фаза хаотического сигнала $\Phi(t)$ не содержит информации о поведении систем на частоте f_b . В этом смысле можно говорить, что рассматриваемый автогенератор является системой с плохо определенной фазой для второй собственной частоты системы. В то же время изучение динамики связанных автогенераторов с помощью семейства фаз $\Phi_s(t)$ легко позволяет выявить синхронное поведение связанных генераторов на обеих частотах.

Рассмотрим поведение разности фаз $\Phi_{s1}(t) - \Phi_{s2}(t)$ на характерных временных масштабах s при фиксированных значениях управляющих параметров и различных значениях параметра связи ϵ . При отсутствии связи, как и следовало ожидать, поведение автогенераторов оказывается несинхронизованным на всех временных масштабах (рис. 5, а). При значении параметра связи $\epsilon = 0.05$ автогенераторы находятся в режиме фазовой синхронизации: фазы хаотического сигнала, введенные с помощью традиционного подхода (например, с помощью (1)) оказываются захваченными. К аналогичным выводам можно прийти, анализируя зависимость разности фаз $\Phi_{s1}(t) - \Phi_{s2}(t)$ для временного масштаба $s_a = 6.2$ (рис. 5, б). В то же время разность фаз неограниченно нарастает (убывает) на других временных масштабах (в том числе и на временном масштабе $s_b = 30.0$), это свидетельствует о том, что данные временные масштабы остаются несинхронизованными. Таким образом, традиционные методы анализа поведения фаз хаотических сигналов связанных систем свидетельствуют о наличии фазовой синхронизации, хотя в данном случае из двух характерных временных масштабов системы синхронизован лишь один. Второй временной масштаб (вторая частота) остается при данных значениях управляющих параметров и параметра связи ϵ несинхронизованным.

При дальнейшем увеличении значения параметра связи второй характерный временной масштаб s_b также становится синхронизованным (см. рис. 5, в). Важно отметить, что другие временные масштабы при этом по-прежнему остаются несинхронизованными, поэтому в рассматриваемых связанных системах синхронизация колебаний будет фазовой, однако теперь фазовая синхронизация будет иметь место для обеих характерных

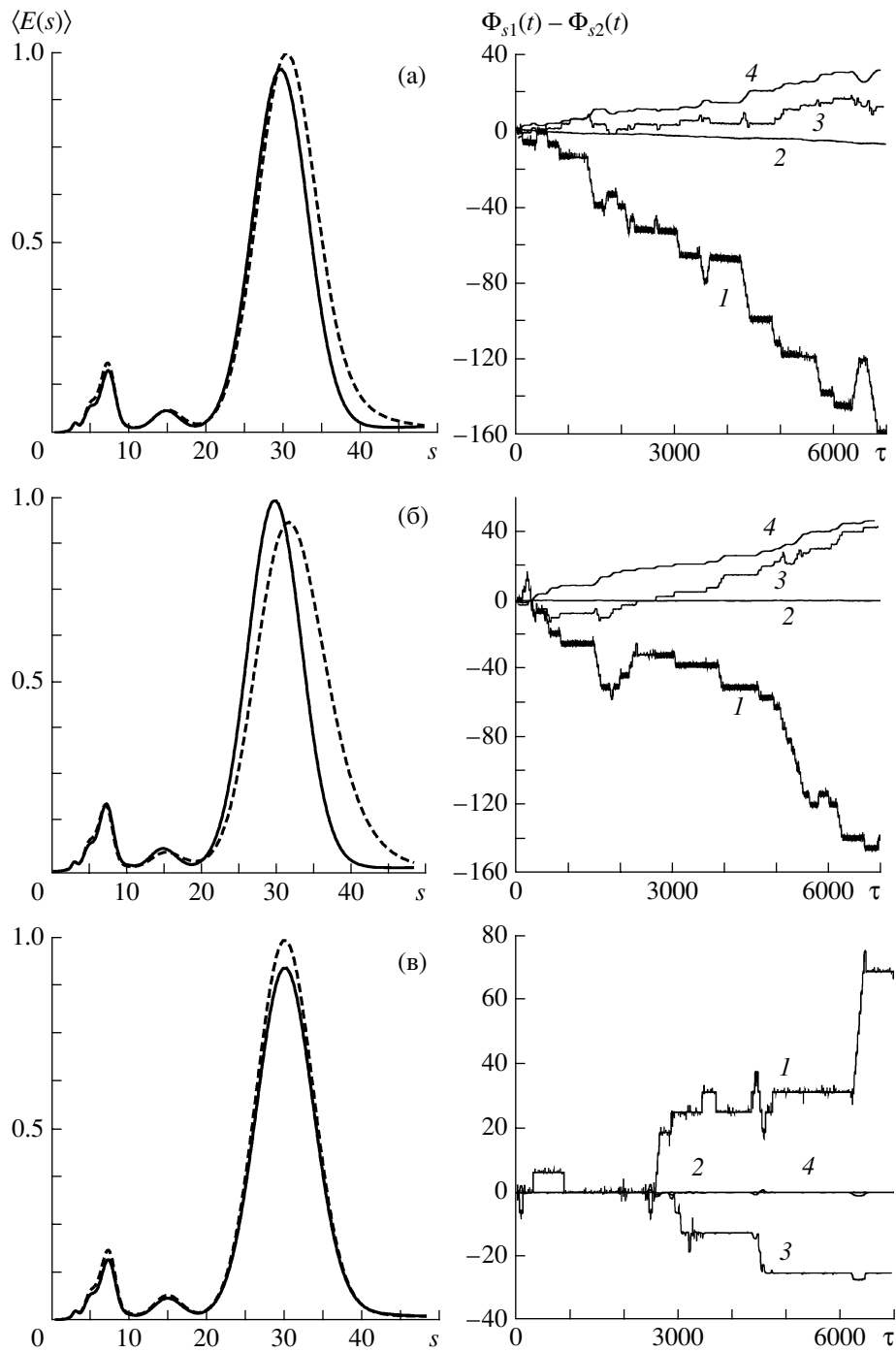


Рис. 5. Энергетические спектры вейвлетного преобразования временных зависимостей $x_{1,2}(t)$ (сплошные кривые – первый автогенератор, пунктирная – второй) (левая колонка) и зависимость разности фаз $\Phi_{s1}(t) - \Phi_{s2}(t)$ для различных временных масштабов s генераторов “TORUS”. Значения параметра связи $\epsilon = 0.0$ (а), 0.05 (б), 0.25 (в). Кривая 1 – $s = 4.0$; 2 – $s = 6.2$; 3 – $s = 15$; 4 – $s = 30$.

временных масштабов. Понятно, что с точки зрения традиционных подходов режимы фазовой синхронизации, показанные на рис. 5, б, в, ничем не отличаются друг от друга, в то время как предложенный метод анализа поведения систем с по-

мощью семейства фаз $\Phi_s(t)$ позволяет четко провести различия между обеими случаями.

Подводя итог, отметим несколько важных аспектов. Традиционные подходы (1)–(4) по выявлению режима фазовой синхронизации, основан-

ные на введении фазы хаотического сигнала, являются корректным для таких временных рядов, которые характеризуются фурье-спектром с ярко выраженной основной частотой f_0 . В этом случае фаза Φ_{s_0} , введенная для временного масштаба $s_0 \approx 1/f_0$, соответствует фазе $\Phi(t)$ хаотического сигнала, введенной традиционным способом (1)–(4). Действительно, поскольку остальные частоты (или, что то же самое, остальные временные масштабы) не играют значительной роли в фурье-спектре, фаза $\Phi(t)$ хаотического сигнала близка к фазе $\Phi_{s_0}(t)$ основной частотной компоненты f_0 (и, соответственно, основного временного масштаба s_0). Очевидно, что в этом случае средние частоты $\bar{f} = \langle \dot{\Phi}(t) \rangle$ и $\bar{f}_{s_0} = \langle \dot{\Phi}_{s_0}(t) \rangle$ должны совпадать друг с другом и с основной частотой f_0 фурье-спектра (см. также [17])

$$\bar{f} = \bar{f}_{s_0} = f_0. \quad (14)$$

Соответственно, в этом случае мгновенная фаза хаотического сигнала $\Phi(t)$ может быть введена в рассмотрение с помощью вейвлетного преобразования как $\Phi(t) = \Phi_{s_{\text{fix}}}(t)$, где временной масштаб s_{fix} близок к временному масштабу s_0 , соответствующему основной спектральной компоненте f_0 (см., например, [28]). В частности, в [29] было показано, что в этом случае вейвлетное преобразование может рассматриваться как фильтрация сигнала (выделение некоторой полосы частот в окрестности основной спектральной компоненты f_0) с последующим преобразованием Гильберта. Понятно, что если в качестве s_{fix} выбрать временной масштаб, достаточно далеко отстоящий от $s_0 = 1/f_0$, то введенная таким образом мгновенная фаза хаотического сигнала не позволит диагностировать явление фазовой синхронизации, даже если оно и имеет место в рассматриваемой системе (см. [29]).

Если же хаотическая временная реализация характеризуется фурье-спектром, в котором отсутствует ярко выраженная основная спектральная компонента (как, например, спектр для системы Ресслера, приведенный на рис. 1), то традиционный подход (1)–(4) уже не работает и может давать некорректные результаты [17]. Очевидно, что в этом случае необходимо рассматривать поведение системы на различных временных масштабах, что в принципе невозможно сделать, используя понятие мгновенной фазы $\Phi(t)$ хаотического сигнала, введенной с помощью соотношений (1)–(4). Предложенный в данной работе подход, основанный на непрерывном вейвлетном преобразовании и введении непрерывного множества фаз, напротив, может быть использован для любого типа хаотического сигнала.

Во-вторых, предложенный подход может быть использован для анализа экспериментальных данных, поскольку он не требует каких-либо априорных знаний об изучаемой системе. Более того, в ряде случаев применение вейвлетного преобразования может уменьшить влияние шума (см. [21, 30]). Представляется вполне вероятным, что описанная методика может быть полезной и эффективной для анализа временных рядов, порождаемых физическими, биологическими, физиологическими и другими системами.

Наконец, важно отметить, что анализ поведения системы на всех временных масштабах, основанный на непрерывном вейвлетном преобразовании, позволяет рассматривать различные виды поведения связанных осцилляторов (полная синхронизация, lag-синхронизация, фазовая синхронизация, асинхронные колебания) с единой точки зрения. Очевидно, что количество синхронизованных временных масштабов однозначно определяют тип поведения. По всей вероятности, возможно ввести количественную характеристику меры синхронизации. Важно также отметить, что изложенный подход (с незначительными изменениями) может быть применен для описания поведения динамических систем под внешним (например, гармоническим) воздействием.

Итак, в данной работе предложен новый подход для описания явления фазовой синхронизации, основанный на непрерывном вейвлетном преобразовании и рассмотрении динамики систем на различных временных масштабах. Данный подход может быть применен к любым динамическим системам (в том числе и к динамическим системам с плохо определенной фазой) и экспериментальным временным рядам.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации по программе “Развитие научного потенциала высшей школы” (проект 333), Российского фонда фундаментальных исследований (проект 05-02-16273), Программы поддержки ведущих научных школ РФ (проект НШ-1250.2003.02), Программы “Университеты России” (проект УР 01.01.371), а также научно-образовательного центра “Нелинейная динамика и биофизика” при Саратовском госуниверситете им. Н.Г. Чернышевского (грант REC-006 of U.S. Civilian Research and Development Foundation for the Independent States of the Former Soviet Union (CRDF)). Авторы благодарят также за финансовую поддержку Фонд некоммерческих программ “Династия” и Международный центр фундаментальной физики (г. Москва).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Rosenblum M.G., Pikovsky A.S., Kurths J.* // Phys. Rev. Lett. 1996. V. 76. № 11. P. 1804.

2. *Osipov G.V., Pikovsky A.S., Rosenblum M.G. et al.* // Phys. Rev. E. 1997. V. 55. № 3. P. 2353.
3. *Parlitz U., Junge L., Lauterborn W.* // Phys. Rev. E. 1996. V. 54. № 2. P. 2115.
4. *Tang D.Y., Dykstra R., Hamilton M.W., Heckenberg N.R.* // Phys. Rev. E. 1998. V. 57. № 3. P. 3649.
5. *Allaria E., Arecchi F.T., Garbo A.D.* // Phys. Rev. Lett. 2001. V. 86. № 5. P. 791.
6. *Kiss I.Z., Hudson J.L.* // Phys. Rev. E. 2001. V. 64. № 4. 046215.
7. *Anishchenko V.S., Balanov A.G., Janson N.B. et al.* // Int. J. Bifurcation and Chaos 2000. V. 10. № 10. P. 2339.
8. *Ticos C.M., Rosa E., Pardo W.B. et al.* // Phys. Rev. Lett. 2000. V. 85. № 14. P. 2929.
9. *Rosa E., Pardo W.B., Ticos C.M. et al.* // Int. J. Bifurcation and Chaos. 2000. V. 10. № 11. P. 2551.
10. *Palus M., Kurths J., Schwarz U. et al.* // Int. J. Bifurcation and Chaos 2000. V. 10. № 11. P. 2519.
11. *Pikovsky A., Rosenblum M., Kurths J.* // Int. J. Bifurcation and Chaos 2000. V. 10. № 10. P. 2291.
12. *Anishchenko V.S., Vadivasova T.E.* // Journal of Communications Technology and Electronics 2002. V. 47. № 2. P. 117.
13. *Pikovsky A., Rosenblum M., Kurths J.* Synchronization: a universal concept in nonlinear sciences. Cambridge University Press, 2001.
14. *Anishchenko V.S., Astakhov V., Neiman A. et al.* Nonlinear Dynamics of Chaotic and Stochastic Systems. Tutorial and Modern Developments. Heidelberg: Springer Verlag, 2001.
15. *Pikovsky A., Rosenblum M., Osipov G. et al.* // Physica D. 1997. V. 104. № 4. P. 219.
16. *Rosenblum M.G., Pikovsky A.S., Kurths J.* // Phys. Rev. Lett. 1997. V. 78. № 22. P. 4193.
17. *Вадивасова Т.Е., Анищенко В.С.* // РЭ. 2004. Т. 49. № 1. С. 76.
18. *Pikovsky A.S., Rosenblum M.G., Kurths J.* // Europhysics Lett. 1996. V. 34. № 3. P. 165.
19. *Rosenblum M.G., Pikovsky A.S., Kurths J.* // Phys. Rev. Lett. 2002. V. 89. № 26. 264102.
20. *Daubechies I.* Ten lectures on wavelets. Philadelphia: SIAM, 1992.
21. *Короновский А.А., Храмов А.Е.* Непрерывный вейвлетный анализ и его приложения. М.: Физматлит, 2003.
22. *Grossman A., Morlet J.* // SIAM J. Math. Anal. 1984. V. 15. № 4. P. 273.
23. *Matsumoto T., Chua L.O., Tokunaga R.* // IEEE Trans. 1987. V. Cir. 34. № 3. P. 240.
24. *Андрушкевич А.В., Кипчатов А.А., Красичков Л.В. и др.* // Изв. вузов. Радиофизика 1995. Т. 38. № 11. С. 1195.
25. *Короновский А.А.* // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1997. Т. 5. № 2. С. 24.
26. *Кипчатов А.А., Короновский А.А.* // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1997. Т. 5. № 2. С. 17.
27. *Егоров Е.Н., Короновский А.А.* // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2002. Т. 10. № 1–2. С. 104.
28. *Lachaux J.P., Rodriguez E., van Quyen M.* // Int. J. Bifurcation and Chaos 2000. V. 10. № 10. P. 2429.
29. *Quiroga R.Q., Kraskov A., Kreuz T., Grassberger P.* // Phys. Rev. E. 2002. V. 65. 041903.
30. *Гусев В.А., Короновский А.А., Храмов А.Е.* Письма в ЖТФ. 2003. Т. 29. № 18. С. 61.