

01;09

## **Обобщенная синхронизация хаотических осцилляторов как частный случай синхронизации временных масштабов**

© А.А. Короновский, А.Е. Храмов

Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского,  
ГосУНЦ „Колледж“  
E-mail: alkor@cas.ssu.runnet.ru, aeh@cas.ssu.runnet.ru

Поступило в Редакцию 20 апреля 2004 г.

На примере двух связанных систем Ресслера показано, что режим обобщенной синхронизации может быть рассмотрен как частный случай синхронизации временных масштабов, описанный в работе Короновского А.А., Храмова А.Е. // Письма в ЖЭТФ. 2004. Т. 79. В. 7. С. 391.

Явление хаотической синхронизации является одним из фундаментальных феноменов, активно изучаемых в последнее время [1–3]. Это явление имеет важное не только теоретическое, но и прикладное значение (в частности, в биологических задачах [4,5], при передаче информации с помощью детерминированных хаотических колебаний [6] и т.д.). В настоящее время различают несколько различных типов хаотической синхронизации, таких как обобщенная [7,8], фазовая [9,10], лаг [11] и полная синхронизация [12]. В работах [13,14] было показано, что фазовая, лаг и полная синхронизации тесно связаны между собой и, по сути дела, являются проявлением одного и того же вида синхронной динамики временных масштабов связанных хаотических осцилляторов; при этом характер синхронного режима (фазовая, лаг или полная синхронизация) определяется количеством синхронизованных временных масштабов, вводимых с помощью непрерывного вейвлетного преобразования [15].

В настоящей работе показано, что режим обобщенной синхронизации также, по сути, является частным случаем синхронного поведения временных масштабов связанных хаотических осцилляторов.

Обобщенная синхронизация [7,8], введенная в рассмотрение для однонаправленно связанных динамических систем, означает, что суще-

стует некоторая функциональная зависимость  $\mathbf{F}[\cdot]$  между состояниями хаотических осцилляторов, т. е.  $\mathbf{x}_2(t) = \mathbf{F}[\mathbf{x}_1(t)]$ . Эта функциональная зависимость может быть весьма сложной, однако существуют методы, позволяющие определить явление синхронизации однонаправленно связанных хаотических осцилляторов (см., например, [7,16,17]).

Временной масштаб  $s$  и ассоциированная с ним фаза  $\phi_s(t)$  вводятся в рассмотрение с помощью непрерывного вейвлетного преобразования

$$W(s, t_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \psi_{s,t_0}^*(t) dt, \quad (1)$$

где  $\psi_{s,t_0}(t)$  — вейвлетная функция, получающаяся из материнского вейвлета  $\psi_0(t)$ :

$$\psi_{s,t_0}(t) = \frac{1}{\sqrt{s}} \psi\left(\frac{t-t_0}{s}\right). \quad (2)$$

Временной масштаб  $s$  определяет ширину вейвлета  $\psi_{s,t_0}(t)$ ,  $t_0$  — временной сдвиг вейвлетной функции вдоль оси времени, символ „\*“ в соотношении (1) означает комплексное сопряжение. В качестве материнского вейвлета используется Морлет-вейвлет

$$\psi_0(\eta) = \frac{1}{\sqrt[4]{\pi}} \exp(j\Omega_0\eta) \exp\left(\frac{-\eta^2}{2}\right). \quad (3)$$

Выбор значения параметра вейвлета  $\Omega_0 = 2\pi$  обеспечивает соотношение  $s = 1/f$  между временным масштабом  $s$  вейвлетного преобразования и частотой  $f$  преобразования Фурье. Интегральное распределение энергии вейвлетного спектра по временным масштабам определяется как

$$\langle E(s) \rangle = \int |W(s, t_0)|^2 dt_0. \quad (4)$$

Рассмотрим временные реализации  $\mathbf{x}_{1,2}(t)$  двух связанных хаотических осцилляторов. Если существует некоторый диапазон временных масштабов  $[s_m; s_b]$ , такой, что для любого временного масштаба  $s \in [s_m; s_b]$  выполняется условие захвата фаз

$$|\phi_{s1}(t) - \phi_{s2}(t)| < \text{const} \quad (5)$$

и доля энергии вейвлетного спектра, приходящаяся на этот диапазон, отлична от нуля

$$E_{s_{nhr}} = \int_{s_m}^{s_b} \langle E(s) \rangle ds > 0, \quad (6)$$

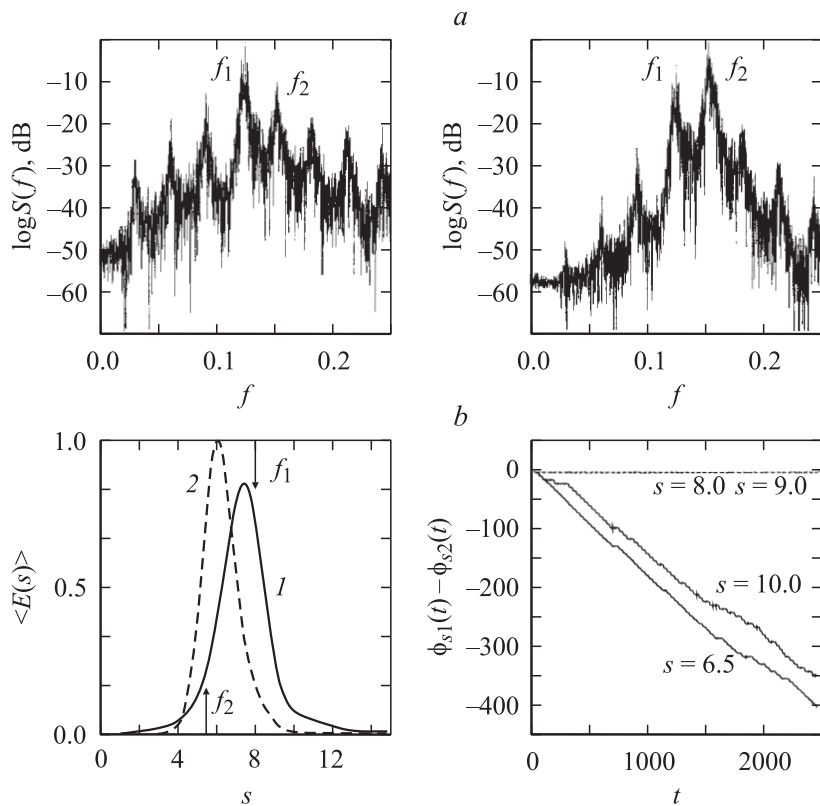
то временные масштабы  $s \in [s_m; s_b]$  являются синхронизованными, а хаотические осцилляторы находятся в режиме синхронизации временных масштабов.

В качестве двух однонаправленно связанных хаотических осцилляторов, демонстрирующих режим обобщенной синхронизации, выберем систему Ресслера

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -\omega_1 y_1 - z_1, \\ \dot{y}_1 &= \omega_1 x_1 + a y_1, \\ \dot{z}_1 &= p + z_1(x_1 - c), \\ \dot{x}_2 &= \omega_2 y_2 - z_2 + \varepsilon(x_1 - x_2), \\ \dot{y}_2 &= \omega_2 x_2 + a y_2 \\ \dot{z}_2 &= p + z_2(x_2 - c), \end{aligned} \quad (7)$$

где  $\mathbf{x}_1 = (x_1, y_1, z_1)^T$  и  $\mathbf{x}_2 = (x_2, y_2, z_2)^T$  — векторы состояний первой (ведущей) и второй (ведомой) систем соответственно. Значения управляющих параметров выбраны следующими:  $\omega_1 = 0.8$ ,  $\omega_2 = 1.0$ ,  $a = 0.15$ ,  $p = 0.2$ ,  $c = 10$  и  $\varepsilon = 0.2$ . При данных значениях управляющих параметров в системе реализуется режим обобщенной синхронизации (см. подробнее [18]), в то время как режим фазовой синхронизации не наблюдается.

Почему в данном случае невозможно выявить режим фазовой синхронизации, хотя имеет место обобщенная синхронизация, становится ясно из анализа поведения временных масштабов. Фурье-спектры связанных хаотических осцилляторов показаны на рис. 1, *a*. Видно, что в спектре присутствуют основные спектральные компоненты с частотами  $f_1 = 0.125$  и  $f_2 = 0.154$ . Анализ поведения временных масштабов показывает, что временные масштабы  $s_1 = 1/f_1 = 8$  связанных осцилляторов, соответствующие частоте  $f_1$  (и масштабы, близкие к  $s_1$ ), оказываются синхронизованными, в то время как временные масштабы  $s_2 = 1/f_2 \simeq 6.5$  и близкие к ним демонстрируют несинхронное поведение (рис. 1, *b*). Поскольку обе частоты в спектре оказывают влияние



**Рис. 1.** *a* — фурье-спектры для первой (ведущей) и второй (ведомой) систем Ресслера (7). Параметр связи  $\varepsilon = 0.2$ . *b* — нормированное распределение энергии в вейвлетном спектре  $\langle E(s) \rangle$  для первой (1) и второй (2) систем Ресслера (7). Временные масштабы, показанные стрелочками, соответствуют частотам  $f_1 = 0.125$  и  $f_2 = 0.154$  соответственно. На правом рисунке приведена разность фаз  $\phi_{s1}(t) - \phi_{s2}(t)$  для различных временных масштабов. В системе реализуется режим обобщенной синхронизации (*a, b*).

на мгновенную фазу хаотического сигнала, вводимую тем или иным образом (см. подробнее [9]), а временные масштабы, соответствующие частоте  $f_2$ , оказываются несинхронными, то и явление фазовой синхронизации не диагностируется (см. также [19]).

Причина такого поведения временных масштабов становится понятной из анализа вейвлетных спектров  $\langle E(s) \rangle$  обеих систем (рис. 1). Временной масштаб  $s_1$  ведущей системы Ресслера характеризуется большим значением энергии, в то время как доля энергии, приходящейся на этот масштаб в ведомой системе, достаточно мала. Вследствие этого ведущая система навязывает свою динамику ведомой системе на временном масштабе  $s_1$ . Напротив, доля энергии, приходящейся на временной масштаб  $s_2$  ведущей системы, мала, а ведомой — велика; и соответственно ведущая система не может навязывать свою динамику ведомой системе, а следовательно, временные масштабы  $s_2$  остаются несинхронизованными. По мере дальнейшего увеличения параметра связи  $\varepsilon$  диапазон синхронизованных масштабов  $[s_m, s_b]$  расширяется, и в тот момент, когда все временные масштабы становятся синхронизованными, в системе возникает режим лаг-синхронизации.

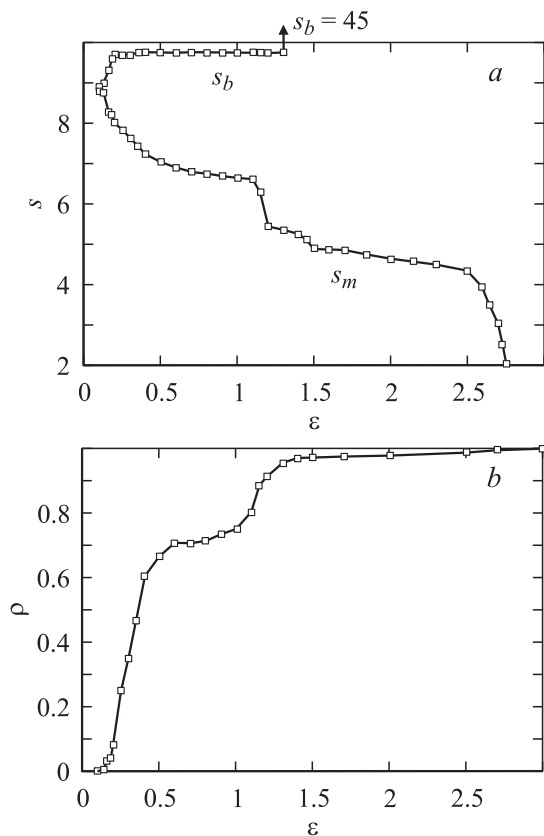
Картину синхронизации временных масштабов количественно иллюстрирует рис. 2, *a*, на котором показаны зависимости верхней  $s_b$  и нижней  $s_m$  границ области масштабов, для которых выполняется условие синхронизации временных масштабов (5) и (6), от параметра связи  $\varepsilon$ . Хаотическая синхронизация возникает при  $\varepsilon \simeq 0.1$ , когда начинает наблюдаться некоторый диапазон масштабов  $\Delta s = (s_b - s_m)$ , для которого имеет место захват фаз. Далее, с ростом  $\varepsilon$  наблюдается расширение области синхронизованных временных масштабов  $\Delta s$ , пока все масштабы не становятся синхронизованными (режим лаг-синхронизации).

Удобной характеристикой описания степени хаотической синхронизации двух хаотических подсистем может служить относительная величина энергии вейвлетного спектра, приходящаяся на синхронные масштабы [13]:

$$\rho = \int_{s_m}^{s_b} E(s) ds / \int_0^{\infty} E(s) ds, \quad (8)$$

где  $E(s)$  — интегральное распределение энергии вейвлетного спектра по масштабам, определяемое формулой (4).

Соответствующая зависимость  $\rho(\varepsilon)$  представлена на рис. 2, *b*. Видно, что с ростом параметра связи имеет место увеличение доли энергии хаотического колебательного процесса, приходящейся на синхронизованные масштабы. При больших параметрах связи ( $\varepsilon > 1.5$ ) величина  $\rho$  стремится к единице. Последнее означает, что вся энергия хаотических



**Рис. 2.** Зависимости: *a* — нижней  $s_m$  и верхней  $s_b$  границ области синхронизованных масштабов, *b* — величины относительной энергии, приходящейся на синхронные масштабы  $\rho$  для системы Ресслера от величины параметра связи  $\epsilon$ .

колебаний приходится на синхронизованные масштабы, и в системе, как уже отмечалось выше, устанавливается режим lag-синхронизации. Иными словами, поведение связанных хаотических осцилляторов, демонстрирующих режим обобщенной синхронизации с точки зрения синхронизации временных масштабов, оказывается точно таким же, как и в случае фазовой синхронизации (см. [13,14]).

Таким образом, все различные режимы хаотической синхронизации (фазовая синхронизация, обобщенная синхронизация, лаг-синхронизация и идентичная синхронизация) обусловлены синхронным поведением определенного диапазона временных масштабов. Иными словами, можно говорить о том, что для связанных хаотических осцилляторов существует единый тип синхронного поведения — синхронизация временных масштабов, а все остальные виды хаотической синхронизации являются частными случаями синхронизации временных масштабов.

Работа выполнена при поддержке Федеральной целевой программы „Интеграция“, Программы поддержки ведущих научных школ РФ, а также научно-преобразовательного центра „Нелинейная динамика и биофизика“ при Саратовском государственном университете им. Н.Г. Чернышевского (грант REC-006 of U.S. Civilian Research and Development Foundation for the Independent States of the Former Soviet Union (CRDF)). А.Е. Храмов благодарит также за финансовую поддержку Фонд „Династия“ и Международный центр фундаментальной физики (г. Москва).

## Список литературы

- [1] *Афраймович В.С., Некоркин В.И., Осипов Г.В., Шалфеев В.Д.* Устойчивость, структуры и хаос в нелинейных сетях синхронизации. *Гапонов-Грехов А.В., Рабинович М.И.*, eds. Горький: ИПФ АН СССР, 1989.
- [2] *Rosa E., Pardo W.B., Ticos C.M., Wakenstein J.A., Monti M.* // *Int. J. Bifurcation and Chaos*. 2000. V. 10(11). P. 2551–2563.
- [3] *Трубецков Д.И., Храмов А.Е.* // *Радиотехника и электроника*. 2003. Т. 48 (1). С. 116–124.
- [4] *Anishchenko V.S., Balanov A.G., Janson N.B., Igosheva N.B., Bordyugov G.V.* // *Int. J. Bifurcation and Chaos*. 2000. V. 10(10). P. 2339–2348.
- [5] *Elson R.C.* et al. // *Phys. Rev. Lett.* 1998. V. 81(25). P. 5692–5695.
- [6] *Дмитриев А.С., Панас А.И.* Динамический хаос. Новые носители информации для систем связи. М.: Физматлит, 2002.
- [7] *Rulkov N.F., Sushchik M.M., Tsimring L.S., Abarbanel H.D.I.* // *Phys. Rev. E*. 1995. V. 51(2). P. 980–994.
- [8] *Kocarev L., Parlitz U.* // *Phys. Rev.* 1996. V. 76(11). P. 1816–1819.
- [9] *Pikovsky A., Rosenblum M., Kurths J.* *Synchronization: a universal concept in nonlinear sciences*. Cambridge University Press, 2001.

- [10] *Anshchenko V.S., Astakhov V., Neiman A., Vadivasova T., Schimansky-Geier L.* Nonlinear Dynamics of Chaotic and Stochastic Systems. Tutorial and Modern Developments. Heidelberg: Springer-Verlag, 2001.
- [11] *Rosenblum M.G., Pikovsky A.S., Kurths J.* // Phys. Rev. Lett. 1997. V. 78(22). P. 4193–4196.
- [12] *Pecora L.M., Carroll T.L.* // Phys. Rev. A. 1991. V. 44(4). P. 2374–2383.
- [13] *Короновский А.А., Храмов А.Е.* // Письма в ЖЭТФ. 2004. Т. 79(7). С. 391–395.
- [14] *Короновский А.А., Трубецков Д.И., Храмов А.Е.* // Докл. РАН. 2004. Т. 395. № 3. С. 143–145.
- [15] *Короновский А.А., Храмов А.Е.* Непрерывный вейвлетный анализ и его приложения. М.: Физматлит, 2003.
- [16] *Abarbanel H.D.I., Rulkov N.F., Sushchik M.* // Phys. Rev. E. 1996. V. 53(5). P. 4528–4535.
- [17] *Pecora L.M., Carroll T.L., Heagy J.F.* // Phys. Rev. E. 1995. V. 52(4). P. 3420–3439.
- [18] *Zheng Z., Hu G.* // Phys. Rev. E. 2000. V. 62(6). P. 7882–7885.
- [19] *Вадивасова Т.Е., Анищенко В.С.* // Радиотехника и электроника. 2004. Т. 49(1). С. 76–82.