

09

## **Длительность установления режима полной синхронизации двух идентичных хаотических систем**

© А.А. Короновский, А.Е. Храмов, И.А. Хромова

Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского,  
ГосУНЦ „Колледж“

E-mail: alkor@cas.ssu.runnet.ru, aeh@cas.ssu.runnet.ru,

KhromovalA@yandex.ru

*Поступило в Редакцию 4 сентября 2003 г.*

Рассматривается время установления режима полной синхронизации для двух идентичных однонаправленно связанных генераторов Ван-дер-Поля–Дуффинга, находящихся в режиме динамического хаоса. Изучен вопрос о влиянии начальной разности фаз генераторов на время установления синхронного режима колебаний. Показано, что при фиксированном значении фазы хаотических колебаний ведущего автогенератора время установления режима полной синхронизации определяется фазой ведомого автогенератора.

Явление синхронизации автоколебательных систем привлекает к себе широкое внимание исследователей в течение долгого времени и сейчас остается актуальной задачей современной теории нелинейных колебаний и волн (см. [1–6]). В последние годы возник вопрос о времени, в течение которого устанавливается режим синхронизации в динамических системах [7–11], демонстрирующих как периодическое, так и хаотическое поведение. Интерес к подобному вопросу связан, в частности, с интенсивно развивающимся направлением передачи информации с использованием хаотических сигналов [12–14].

Время установления режима синхронизации после включения внешнего воздействия может рассматриваться как переходный процесс в неавтономной динамической системе. Хорошо известно, что длительность переходного процесса в динамической системе зависит от начальных условий и подчиняется ряду определенных закономерностей [15–17]. В автоколебательных системах, демонстрирующих периодическое поведение, в качестве начального условия может использоваться фаза колебаний. В частности, ранее [9] было показано, что

для автоколебательных динамических систем как с конечным числом степеней свободы (генератор Ван-дер-Поля), так и бесконечномерных (распределенная нелинейная активная среда „винтовой электронный поток — встречная электромагнитная волна“), находящихся под внешним периодическим воздействием, время установления синхронных колебаний на частоте внешней вынуждающей силы существенным образом зависит от начальной разности фаз собственных колебаний системы и внешнего воздействия. Подобные результаты были получены и для случая полной синхронизации двух однонаправленно связанных идентичных подсистем, находящихся в режиме периодических колебаний [11].

В том случае, если синхронизируемая динамическая система демонстрирует режим хаотических колебаний, фаза хаотических колебаний, определенная тем или иным способом [5,18–20], не определяет однозначно состояния системы, хотя и является удобной характеристикой. Целью настоящей работы является изучение вопроса о том, как ведет себя время установления режима полной синхронизации в двух идентичных однонаправленно связанных хаотических подсистемах для различных начальных условий, характеризующихся одним и тем же значением фазы.

В качестве объекта исследования выбраны генераторы Ван-дер-Поля–Дуффинга [21,22], которые, будучи связаны однонаправленной связью (рис. 1, а), демонстрируют явление полной хаотической синхронизации [23,24].

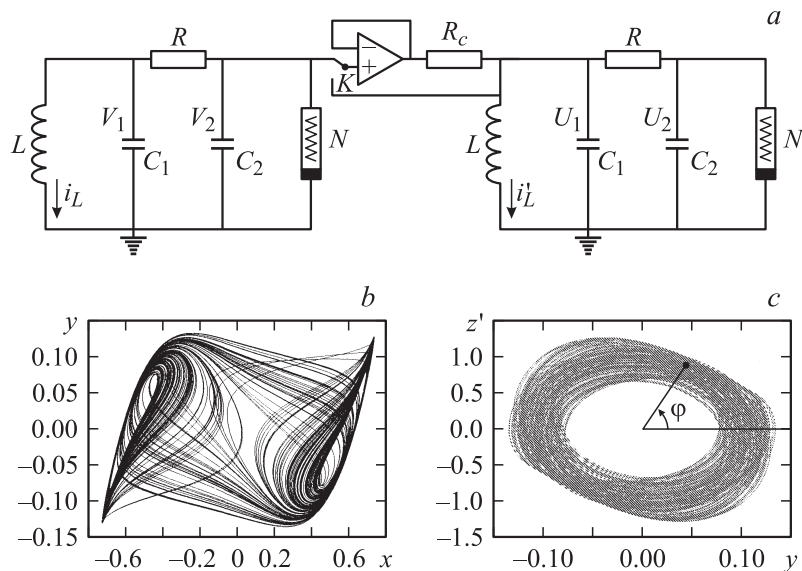
Ведущий генератор описывается системой безразмерных дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = -v[x^3 - \alpha x - y], \quad \dot{y} = x - y - z, \quad \dot{z} = \beta y, \quad (1)$$

а ведомый генератор соответственно

$$\begin{aligned} \dot{u} &= -v[(u)^3 - \alpha u - v] + v\varepsilon(x - u)\sigma(\tau - \tau_0), \\ \dot{v} &= u - v - w, \quad \dot{w} = \beta v, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $\sigma(\xi)$  — функция Хевисайда,  $x$ ,  $y$ ,  $z$  и  $u$ ,  $v$ ,  $w$  — динамические переменные, характеризующие состояние ведущего и ведомого генераторов соответственно, связанные с размерными величинами следующим образом [21,24]:  $x = V_1\sqrt{bR}$ ,  $y = V_2\sqrt{bR}$ ,  $z = i_L\sqrt{bR^3}$ ,  $u = U_1\sqrt{bR}$ ,



**Рис. 1.** *a* — два идентичных однонаправленно связанных генератора Ван-дер-Поля–Дуффинга; *b* — фазовый портрет хаотических колебаний генератора (1), находящегося в режиме бистабильного хаоса при значениях управляющих параметров  $\alpha = 0.35, \beta = 300, \nu = 100$ ; *c* — проекция аттрактора на плоскость  $(y, z')$  для определения фазы  $\varphi$  хаотических колебаний.

$v = U_2\sqrt{bR}, w = i'_L\sqrt{bR^3}$ . Вольт-амперная характеристика нелинейного элемента  $N$  выбрана в виде кубической параболы

$$i(V) = aV + bV^3. \quad (3)$$

Безразмерное время в системе (1), (2) определяется как  $\tau = t/(RC_2)$ , безразмерные величины  $\alpha, \beta$  и  $\gamma$  связаны с размерными параметрами генераторов следующим образом:  $\alpha = -(1 + aR), \beta = C_2R^2/L, \nu = C_2/C_1$ , параметр связи  $\varepsilon = R/R_c$ .

Численное моделирование поведения двух однонаправленно связанных генераторов (1), (2) осуществлялось методом Рунге–Кутты четвертого порядка с шагом интегрирования по времени  $\Delta\tau = 2 \cdot 10^{-5}$ , значения управляющих параметров, аналогично [24], были выбраны равными  $\alpha = 0.35, \beta = 300, \nu = 100$ , при которых в системе (1)

наблюдается бистабильная хаотическая динамика (рис. 1, *b*). Параметр связи был выбран равным  $\varepsilon = 1.35$ , что обеспечивает установление режима полной синхронизации обеих подсистем [24].

Включение однонаправленной связи между ведущим и ведомым автогенераторами осуществлялось в момент времени  $\tau_0$ , когда в обоих автогенераторах завершились переходные процессы, и изображающие точки в фазовых пространствах  $(x, y, z)$  и  $(u, v, w)$  достигли хаотических аттракторов. До момента включения связи  $\tau_0$  оба генератора находились в режиме автономных автоколебаний. Интервал времени  $T_s$ , в течение которого устанавливался режим полной синхронизации, определялся как

$$T_s = \tau_s - \tau_0, \quad (4)$$

где  $\tau_s$  — момент времени, когда связанные подсистемы синхронизируются. В качестве критерия полной синхронизации выбиралось условие

$$\sqrt{(x - u)^2 + (y - v)^2 + (z - w)^2} \leq 5 \cdot 10^{-3}, \quad \forall \tau \geq \tau_s. \quad (5)$$

Фаза хаотических колебаний  $\varphi$  для каждого автогенератора определялась как угол для проекции хаотического аттрактора на плоскость новой системы координат ( $y' = y, z' = -0.8192x + 0.5735z$ ) для ведущего (рис. 1, *c*) и ( $v' = v, w' = -0.8192u + 0.5735w$ ) для ведомого генераторов соответственно (см. [5,18,19]).

При численном моделировании системы (1), (2) включение связи между генераторами осуществлялось всегда в один и тот же момент времени  $\tau_0$ , когда значения динамических переменных, характеризующих состояние ведущего генератора (1), были равны  $x = 0.41009$ ,  $y = -0.09994$ ,  $z = 0.75978$ , что соответствует фазе хаотических колебаний  $\varphi_m = 3\pi/4$ . Начальные условия  $(u, v, w)$  в ведомом генераторе (2) при включении связи выбирались каждый раз разными, но так, чтобы, во-первых, они принадлежали хаотическому аттрактору, а во-вторых, характеризовались одной и той же фазой  $\varphi_s$ .

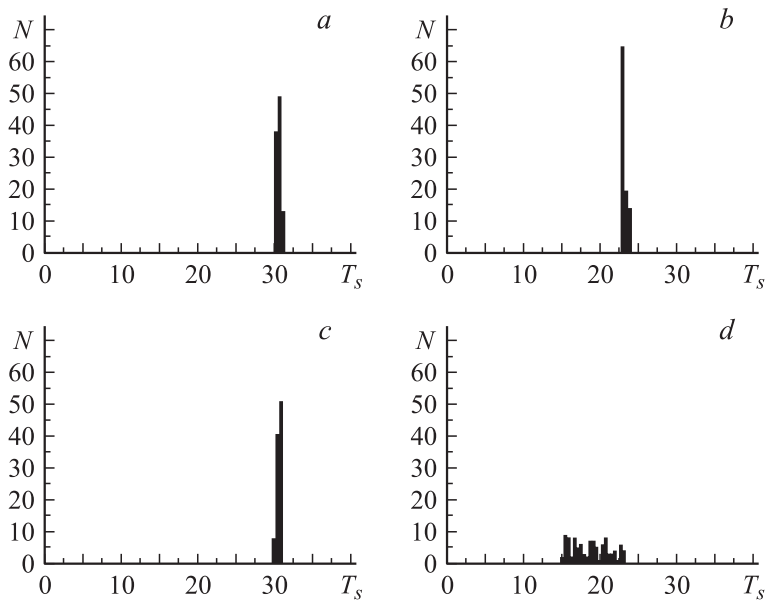
Поскольку хаотический аттрактор содержит два „листа“ ( $x < 0$  и  $x > 0$ ), соответствующих хаотическим колебаниям, между которыми осуществляются переключения (рис. 1, *b*), то длительность установления синхронного режима для одной и той же начальной фазы хаотических колебаний ведомого генератора  $\varphi_s$  изучалась отдельно для верхнего и нижнего листов хаотического аттрактора. Начальные условия для ведущего генератора каждый раз выбирались одними и

теми же (см. выше), принадлежащими верхнему (положительному) листу хаотического аттрактора.

В ходе проведения исследований установлено, что для изучаемой динамической системы с бистабильным хаотическим аттрактором длительность установления режима полной синхронизации определяется тем, принадлежат ли начальные условия в ведущем и ведомом автогенераторах одному и тому же листу хаотического аттрактора или разным. В том случае, когда начальные условия в ведущем и ведомом генераторах выбираются лежащими на разных листах (верхний лист для ведущего и нижний лист для ведомого автогенераторов) хаотического аттрактора, длительность установления режима полной синхронизации в значительной мере определяется фазой хаотических колебаний ведомого генератора (как уже было сказано выше, начальная фаза хаотических колебаний в ведущем автогенераторе была фиксирована).

Сказанное иллюстрирует рис. 2, *a, b*, на котором приведено распределение времен установления режима полной синхронизации  $T_s$  для различных начальных фаз  $\varphi_s$  хаотических колебаний. Каждое распределение построено по 100 различным начальным условиям (с одной и той же начальной фазой хаотических колебаний), принадлежащим нижнему листу хаотического аттрактора. Видно, что получившиеся распределения по своему характеру близки к  $\delta$ -функции. Это свидетельствует о том, что время установления режима полной синхронизации в рассматриваемой системе (1), (2) определяется фазой хаотических колебаний. При этом для различных начальных условий (лежащих на нижнем листе хаотического аттрактора), характеризующихся одной и той же фазой  $\varphi_s$ , время установления режима полной синхронизации практически одинаково.

Несколько иная картина наблюдается в том случае, когда начальные условия ведомого генератора в момент включения связи  $\tau_0$  выбираются на том же самом листе хаотического аттрактора (в данном случае на верхнем), на котором находится изображающая точка, характеризующая поведение ведущего автогенератора. В этом случае, если фазы ведущего  $\varphi_m$  и ведомого  $\varphi_s$  автогенераторов различаются достаточно сильно, распределение времен установления режима полной синхронизации, как и для противоположного листа хаотического аттрактора, имеет вид, близкий к  $\delta$ -функции (рис. 2, *c*). В том случае, однако, когда фазы хаотических колебаний в ведущем и ведомом автогенераторах оказываются близки (а изображающие точки находятся на одинаковых



**Рис. 2.** Распределение времен установления режима полной синхронизации двух однонаправленно связанных генераторов Ван-дер-Поля–Дуффинга. Начальные условия ведущего генератора с фазой  $\varphi_m = 3\pi/4$  выбраны на верхнем листе хаотического аттрактора. Начальные условия ведомого генератора выбраны: *a* — на нижнем листе хаотического аттрактора, начальная фаза  $\varphi_s = 1.03$ ; *b* — на нижнем листе хаотического аттрактора, начальная фаза  $\varphi_s = 1.73$ ; *c* — на верхнем листе хаотического аттрактора, начальная фаза  $\varphi_s = 1.03$ ; *d* — на верхнем листе хаотического аттрактора, начальная фаза  $\varphi_s = 2.78$ . Каждое распределение построено по ста различным начальным условиям, случайным образом выбранным на хаотическом аттракторе.

листах хаотических аттракторов), распределение времен установления режима полной синхронизации „рассыпается“ (рис. 2, *d*). В этом случае время установления режима полной синхронизации в двух связанных подсистемах варьируется в достаточно широких пределах для одной и той же фазы  $\varphi_s$  хаотических колебаний ведомого автогенератора.

Подобное явление, по всей видимости, может быть объяснено следующим образом: когда изображающие точки, отвечающие динамике

ведущего и ведомого автогенераторов, близки по фазе и находятся на одинаковых листах хаотических аттракторов, автогенераторы могут быть достаточно близки к режиму полной синхронизации. В этом случае время установления режима полной синхронизации будет значительно меньше, чем в случае, когда автогенераторы изначально рассинхронизованы. В то же самое время тот факт, что изображающие точки близки по фазе и находятся на одинаковых листах, еще не означает, что рассматриваемые подсистемы близки к синхронному режиму, поскольку известно, что хаотическая динамика характеризуется экспоненциальным разбеганием фазовых траекторий [25]. Следовательно, для этого случая время синхронизации  $T_s$  будет сопоставимо со временем, характерным для других значений фаз  $\varphi_s$ . Все вышесказанное и ведет к тому, что распределение времен синхронизации  $T_s$  имеет вид, представленный на рис. 2, *d*.

Таким образом, при синхронизации двух однонаправленно связанных автогенераторов Ван-дер-Поля–Дуффинга, находящихся в режиме хаотических колебаний, время установления режима полной синхронизации может быть охарактеризовано фазой  $\varphi_s$  хаотических колебаний ведомого автогенератора (при фиксированном значении фазы ведущего автогенератора  $\varphi_m$ ). Важную роль играет также то, находятся ли изображающие точки, отвечающие поведению ведущего и ведомого автогенераторов, на одинаковых или на противоположных листах хаотического аттрактора в момент  $t_0$  включения однонаправленной связи: в том случае, когда изображающие точки находятся на разных листах аттракторов, время установления режима полной синхронизации  $T_s$  практически одинаково для всех начальных условий, соответствующих одному и тому же значению фазы  $\varphi_s$  хаотических колебаний ведомого автогенератора. В том случае, если изображающие точки двух автогенераторов находятся на одинаковых листах хаотических аттракторов и не сильно различаются по фазам в момент включения связи, среднее время установления режима полной синхронизации уменьшается, а распределение времен  $T_s$  сильно отличается от вида  $\delta$ -функции, который характерен для распределений с другими фазами  $\varphi_s$ .

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, Программы поддержки ведущих научных школ РФ, а также научно-образовательного центра „Нелинейная динамика и биофизика“ при Саратовском госуниверситете им. Н.Г. Чернышевского (грант REC–006 of U.S. Civilian Research and Development Foundation for the Independent States of the Former Soviet Union (CRDF)).

## Список литературы

- [1] *Блехман И.И.* Синхронизация динамических систем. М.: Наука, 1971.
- [2] *Блехман И.И.* Синхронизация в природе и технике. М.: Наука, 1981.
- [3] *Landa P.S.* Nonlinear oscillations and waves in dynamical systems. Kluwer Academic Publishers. Dordrecht–Boston–London, 1996.
- [4] *Анищенко В.С., Вадивасова Т.Е., Астахов В.В.* Нелинейная динамика хаотических и стохастических систем. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 1999.
- [5] *Pikovsky A., Rosenblum M., Kurths J.* // *Int. J. Bifurcation and Chaos.* 2000. V. 10 (10). P. 2291–2305.
- [6] *Анищенко В.С., Вадивасова Т.Е.* // *Радиотехника и электроника.* 2002. Т. 47 (2). С. 133–162.
- [7] *Leung H.K.* // *Phys. Rev. E.* 1998. V. 58 (5). P. 5704–5709.
- [8] *Wofo P., Kraenkel R.A.* // *Phys. Rev. E.* 2002. V. 65. P. 036225.
- [9] *Короновский А.А., Трубецков Д.И., Храмов А.Е.* // *Докл. АН РАН.* 2003. Т. 389 (6). С. 749–752.
- [10] *Трубецков Д.И., Короновский А.А., Храмов А.Е.* // *Изв. вузов. Радиофизика* (в печати).
- [11] *Короновский А.А., Храмов А.Е., Храмова И.А.* // *Письма в ЖТФ.* 2004. Т. 30. В. 6. С. 79–86.
- [12] *Суото К.М., Oppenheim A.V.* // *Phys. Rev. Lett.* 1993. V. 71 (1). P. 65–68.
- [13] *Дмитриев А.С., Кузьмин Л.В., Панас А.И., Старков С.О.* // *Радиотехника и электроника.* 1998. Т. 43. С. 1115–1128.
- [14] *Dmitriev A.S., Hasler M., Panas A.I., Zakharchenko K.V.* // *Nonlinear Phenomena in Complex Systems.* 2003. V. 6 (1). P. 1–14.
- [15] *Короновский А.А., Храмов А.Е., Храмова И.А.* // *Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика.* 2003. Т. 11 (1). С. 36–46.
- [16] *Короновский А.А., Трубецков Д.И., Храмов А.Е., Храмова А.Е.* // *Изв. вузов. Радиофизика.* 2002. Т. XLV (10). С. 880–886.
- [17] *Астафьев Г.Б., Короновский А.А., Храмов А.Е., Храмова А.Е.* // *Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика.* 2003. Т. 11 (4).
- [18] *Rosenblum M.G., Pikovsky A.S., Kurths J.* // *Phys. Rev. Lett.* 1996. V. 76 (11). P. 1804–1807.
- [19] *Rosenblum M.G., Pikovsky A.S., Kurths J.* // *Phys. Rev. Lett.* 1997. V. 78 (22). P. 4193–4196.
- [20] *Rosenblum M.G., Kurths J.* // *Nonlinear analysis of physiological data* (Ed. by Kantz H., Kurths J.). Berlin: Springer, 1998. P. 91–99.
- [21] *King G.P., Gaito S.T.* // *Phys. Rev. A.* 1992. V. 46 (6). P. 3092–3099.
- [22] *King G.P., Gaito S.T.* // *Phys. Rev. A.* 1992. V. 46 (6). P. 3100–3110.
- [23] *Murali K., Lakshmanan M.* // *Phys. Rev. E.* 1994. V. 48 (3). P. R1624–R1626.
- [24] *Murali K., Lakshmanan M.* // *Phys. Rev. E.* 1994. V. 49 (6). P. 4882–4885.
- [25] *Кузнецов С.П.* Динамический хаос. Сер. Современная теория колебаний и волн. М.: Физматлит, 2001.