

УДК 519.7

О МЕХАНИЗМЕ РАЗРУШЕНИЯ ПОЛНОЙ ХАОТИЧЕСКОЙ СИНХРОНИЗАЦИИ

© 2004 г. А. А. Короновский, член-корреспондент РАН Д. И. Трубецков, А. Е. Храмов

Поступило 04.11.2003 г.

На примере связанных систем Ресслера в работе рассматривается механизм, обуславливающий разрушение режима полной хаотической синхронизации двух связанных хаотических динамических систем при изменении параметра связи между ними. Предложен новый способ введения фазы хаотического сигнала на основе непрерывного вейвлетного преобразования.

Явление синхронизации автоколебательных систем широко распространено в природе [1–3]. Особое внимание исследователей в последние годы привлечено к хаотической синхронизации динамических систем. Выделяют различные виды: полная синхронизация [4, 5], lag-синхронизация [6], обобщенная [7, 8] и фазовая [9, 10] синхронизации. При полной синхронизации состояния взаимодействующих хаотических подсистем совпадают ($\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_2$), если эти системы идентичны, или остаются близкими ($|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| \approx 0$), если управляющие параметры систем слегка различаются. При фазовой синхронизации наблюдается захват фазы хаотических сигналов $|m\phi_1 - n\phi_2| < \text{const}$ ($m, n \in \mathbb{R}$). Фаза хаотического сигнала может быть введена различными способами [3, 10], однако существуют некоторые ограничения [3, 11]. Амплитуды хаотических сигналов в режиме фазовой синхронизации не коррелируют друг с другом.

В связанных слабо неидентичных хаотических осцилляторах режим фазовой синхронизации наблюдается уже при слабой связи. При сильной связи реализуется режим полной синхронизации. При промежуточных значениях параметра связи устанавливается режим lag-синхронизации, когда состояния двух подсистем почти совпадают с точностью до некоторого временного сдвига τ : $\mathbf{r}_1(t) \approx \mathbf{r}_2(t - \tau)$. Таким образом, уменьшая силу связи между двумя неидентичными хаотическими системами, можно осуществить переход от режима полной синхронизации к режиму фазовой синхронизации.

Целью настоящей работы является выявление механизма, обуславливающего переход от одного

типа синхронизации к другому по мере увеличения (уменьшения) силы связи между хаотическими подсистемами. В качестве объекта исследования выбраны две связанные друг с другом неидентичные системы Ресслера

$$\dot{x}_{1,2} = -\omega_{1,2}y_{1,2} - z_{1,2} + \varepsilon(x_{2,1} - x_{1,2}),$$

$$\dot{y}_{1,2} = \omega_{1,2}x_{1,2} + ay_{1,2}, \quad (1)$$

$$\dot{z}_{1,2} = f + z_{1,2}(x_{1,2} - c),$$

где значения управляющих параметров, по аналогии с [6], выбраны следующими: $a = 0.165$, $f = 0.2$, $c = 10$. Управляющий параметр $\omega_{1,2} = \omega_0 \pm \Delta$ определяет слабую неидентичность рассматриваемых подсистем ($\omega_0 = 0.97$, $\Delta = 0.02$), а величина ε является параметром связи. При $\varepsilon = \varepsilon_p \approx 0.036$ в связанных системах Ресслера устанавливается режим фазовой синхронизации, при $\varepsilon = \varepsilon_l \approx 0.14$ осуществляется переход к режиму lag-синхронизации, а с дальнейшим увеличением параметра связи ε временной сдвиг τ стремится к нулю, что соответствует режиму полной синхронизации [6].

Традиционно при изучении явления хаотической синхронизации используется расчет ляпуновских экспонент, нахождение фазы хаотических сигналов каждой подсистем и определение соотношения между ними, определение функции подобия [6] и т.п. Однако все эти методы позволяют обнаружить существование того или иного типа хаотической синхронизации, но не раскрывают механизма его возникновения и смены одного типа синхронизации другим. В настоящей работе мы предлагаем использовать для этой цели непрерывное вейвлетное преобразование [12], на основе которого вводится семейство фаз хаотического сигнала.

Непрерывное вейвлетное преобразование осуществляется путем свертки

$$W(s, t_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \psi_{s, t_0}^*(t) dt, \quad (2)$$

анализируемой функции $f(t)$ с двухпараметрической вейвлетной функцией $\psi_{s,t_0}(t)$, которая получается из материнского вейвлета $\psi_0(t)$

$$\psi_{s,t_0}(t) = \frac{1}{\sqrt{s}} \psi\left(\frac{t-t_0}{s}\right). \quad (3)$$

Параметр s , отвечающий за ширину вейвлета, называется временным масштабом вейвлетного преобразования ($s \in \mathbb{R}^+$), t_0 – параметр сдвига, определяющий положение вейвлета на оси времени t , звездочка в соотношении (2) означает комплексное сопряжение. В качестве вейвлетной функции использовался морлет–вейвлет

$$\psi_0(\eta) = \frac{1}{\sqrt[4]{\pi}} \exp(j\omega_0\eta) \exp\left(-\frac{\eta^2}{2}\right) \quad (4)$$

с параметром $\omega_0 = 6$. При таком выборе параметра вейвлета временной масштаб s соответствует частотной компоненте $f \approx \frac{1}{s}$ фурье-спектра анализируемой временной реализации.

Получающаяся в результате преобразования (2) комплексная функция $W(s, t_0)$ характеризует динамику системы на временном масштабе s в текущий момент времени t_0 . Абсолютная величина $|W(s, t_0)|$ характеризует, насколько сильно представлен данный временной масштаб s во временной реализации системы в текущий момент времени t_0 . При использовании морлет–вейвлета с некоторой степенью условности можно считать, что речь идет о присутствии в момент времени t_0 в фурье–спектре спектральной компоненты $f \approx \frac{1}{s}$ и о ее интенсивности [12].

Одновременно для каждого временного масштаба s естественным образом оказывается определенной фаза $\phi_s(t_0) = \arg W(s, t_0)$, совокупность которых образует семейство фаз хаотического сигнала. Такой подход позволяет, во–первых, отслеживать фазовую динамику системы на всех временных масштабах, а во–вторых, избежать сложностей [3, 11], возникающих при традиционных способах определения фазы (с помощью преобразования Гильберта, метода сечения Пуанкаре и т.п.)

Рассмотрим теперь, что происходит с вейвлетными поверхностями $W_1(s, t)$ и $W_2(s, t)$ (построенными соответственно по временным реализациям $y_1(t)$ и $y_2(t)$) при уменьшении параметра связи ϵ в системе (1).

При больших значениях параметра связи поведение систем (1) практически одинаково $\mathbf{r}_1 \approx \mathbf{r}_2$, что свидетельствует о режиме полной синхронизации*. Соответственно, для режима полной син-

хронизации должны быть одинаковыми и вейвлетные поверхности $W_1(s, t) \approx W_2(s, t)$. Понятно, что и динамика фаз всех временных масштабов будет совпадать, т.е. $\phi_{s1}(t) \approx \phi_{s2}(t)$.

С уменьшением параметра связи ϵ и возникновением в системе режима lag–синхронизации временные реализации, порождаемые динамическими системами (1), оказываются сдвинутыми относительно друг друга на временной интервал τ , величина которого тем больше, чем меньше параметр связи ϵ . Поскольку имеет место соотношение $\mathbf{r}_1(t - \tau) \approx \mathbf{r}_2(t)$, а также в силу определения вейвлетного преобразования (2) вейвлетные поверхности $W_1(s, t)$ и $W_2(s, t)$ соотносятся как $W_1(s, t - \tau) \approx W_2(s, t)$. Аналогично, фазы на всех временных масштабах s оказываются сдвинутыми относительно друг друга $\phi_{s1}(t - \tau) \approx \phi_{s2}(t)$. Иными словами, на каждом временном масштабе в режиме lag–синхронизации происходит захват фазы, т.е. все временные масштабы в связанных системах остаются синхронизованными.

С дальнейшим уменьшением параметра связи ϵ система выходит из режима lag–синхронизации и переходит в режим фазовой синхронизации. При этом происходит следующее: масштабы s , роль которых в динамике системы значительна, остаются синхронизованными, иными словами, на этих масштабах по–прежнему существует захват фазы ϕ_s . В то же время часть временных масштабов s выходит из режима синхронизации, т.е. на этих масштабах разность фаз растет с течением времени.

Сказанное иллюстрирует рис. 1. На нем приведена динамика разности фаз $\phi_{s1} - \phi_{s2}$ различных временных масштабов s . Временные масштабы $s = 5$ и $s = 6$ обладают наибольшей долей энергии $\int |W(s, t)|^2 dt$ вейвлетного спектра. На этих масштабах, как видно из рис. 1, динамика фаз $\phi_{1,2}$ оказывается синхронной, т.е. наблюдается захват фазы. В то же время временные масштабы, на которые приходится малая доля энергии вейвлетного спектра (на рис. 1 приведены зависимости для временных масштабов $s = 3$ и $s = 4$), оказываются рас–синхронизованными, и на этих масштабах разность фаз растет с течением времени.

При последующем уменьшении параметра связи ϵ режим фазовой синхронизации разрушается и системы переходят в асинхронный режим. Это соответствует тому, что все временные масштабы s ведут себя несинхронно, и ни на одном из них нет захвата фаз.

Таким образом, явление фазовой синхронизации может рассматриваться с точки зрения того, что некоторая часть основных временных (или

* Векторы $\mathbf{r}_{1,2} = (x_{1,2}, y_{1,2}, z_{1,2})^T$ представляют собой состояния первой и второй систем (1) соответственно.

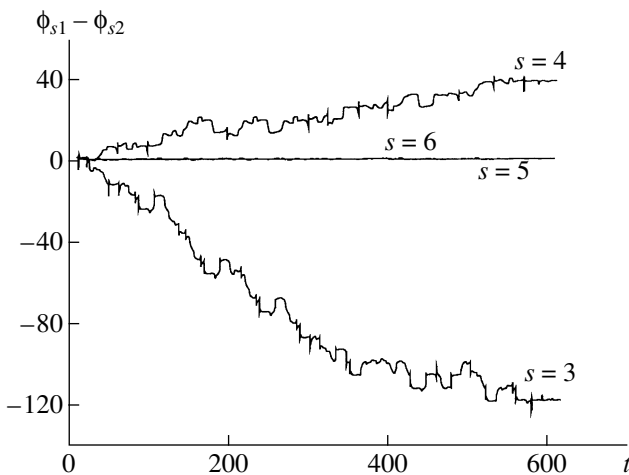


Рис. 1. Зависимость разности фаз $\phi_{s1} - \phi_{s2}$ от времени t для различных временных масштабов s . Видно, что временные масштабы $s = 3$ и $s = 4$ рассинхронизованы, в то время как временные масштабы $s = 5$ и $s = 6$, на которые приходится значительная доля энергии, находятся в состоянии синхронизма.

можно говорить частотных) масштабов колебаний, на которые приходится наибольшая доля энергии, оказывается синхронизованной, в то время как оставшиеся временные масштабы (опять-таки можно говорить частоты) уже вышли из режима синхронизма. Вследствие этого динамика систем уже не является полностью синхронной, хотя и несет на себе отпечаток того, что наиболее важные временные масштабы все еще синхронизованы.

Следует также отметить, что при фазовой синхронизации фаза хаотического сигнала, вводимая тем или иным образом [3, 10], по сути дела является фазой, соответствующей главной частоте ω_0 в фурье-спектре сигнала. Становится понятно, что явление захвата фаз и, соответственно, фазовой синхронизации диагностируется до тех пор, пока частоты колебаний, на которые приходится наибольшая доля энергии в спектре, оказываются синхронными. Более того, как показано в [11], неудачное введение фазы хаотического сигнала, при котором средняя частота

$$\bar{\omega} = \left\langle \frac{(d\phi(t))}{(dt)} \right\rangle \quad (5)$$

не совпадает с базовой частотой фурье-спектра ω_0 , приводит к некорректным результатам. В связи с этим, подход к изучению явления синхронизации на основе вейвлетного преобразования и введения семейства фаз ϕ_s , соответствующих различным временным масштабам s хаотического процесса, представляется весьма продуктивным и информативным.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, Программы поддержки ведущих научных школ РФ, а также научно-образовательного центра "Нелинейная динамика и биофизика" при Саратовском госуниверситете им. Н.Г. Чернышевского (грант REC-006 of U.S. Civilian Research and Development Foundation for the Independent States of the Former Soviet Union (CRDF)).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Блехман И.И. Синхронизация в природе и технике. М.: Наука, 1981.
2. Anshchenko V.S., Astakhov V., Neiman A. et al. Nonlinear Dynamics of Chaotic and Stochastic Systems. Tutorial and Modern Developments. Heidelberg: Springer, 2001.
3. Пиковский А., Розенблум М., Куртс Ю. Синхронизация. Фундаментальное нелинейное явление. М.: Техносфера, 2003. 496 с.
4. Pecora L.M., Carroll T.L. // Phys. Rev. A. 1991. V. 44. № 4. P. 2374–2383.
5. Murali K., Lakshmanan M. // Phys. Rev. E. 1994. V. 48. № 3. P. R1624–R1626.
6. Rosenblum M.G., Pikovsky A.S., Kurths J. // Phys. Rev. Lett. 1997. V. 78. № 22. P. 4193–4196.
7. Rulkov N.F., Sushchik M.M., Tsimring L.S., Abarbanel H.D.I. // Phys. Rev. E. 1995. V. 51. № 2. P. 980–994.
8. Abarbanel H.D.I., Rulkov N.F., Sushchik M. // Phys. Rev. E. 1996. V. 53. № 5. P. 4528–4535.
9. Rosenblum M.G., Pikovsky A.S., Kurths J. // Phys. Rev. Lett. 1996. V. 76. № 11. P. 1804–1807.
10. Pikovsky A., Rosenblum M., Kurths J. // Intern. J. Bifurcation and Chaos. 2000. V. 10. № 10. P. 2291–2305.
11. Вадивасова Т.Е., Анищенко В.С. // Радиотехника и электроника. 2004. В. 1. С. 34–41.
12. Короновский А.А., Храмов А.Е. Непрерывный вейвлетный анализ и его приложения. М.: Физматлит, 2003.