

**НЕЛИНЕЙНЫЕ
ЯВЛЕНИЯ**

УДК 621.385; 621.317

**ИССЛЕДОВАНИЕ КОГЕРЕНТНЫХ СТРУКТУР
В ЭЛЕКТРОННОМ ПУЧКЕ СО СВЕРХКРИТИЧЕСКИМ ТОКОМ
С ПОМОЩЬЮ ВЕЙВЛЕТНОЙ БИКОГЕРЕНТНОСТИ**

© 2002 г. А. А. Короновский, А. Е. Храмов

*Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского,
Государственный учебно-научный центр “Колледж”*

Поступила в редакцию 08.02.2002 г.

Представлены результаты численного моделирования влияния неоднородности ионного фона на сложную пространственно-временную динамику электронного пучка с виртуальным катодом в плоской геометрии. Демонстрируется возможность увеличения частоты генерации без изменения тока пучка. С помощью вейвлетной бикогерентности и визуализации траекторий электронов на пространственно-временных диаграммах анализируются формирующиеся в пучке пространственно-временные структуры, которые определяют сложную хаотическую динамику исследуемой неоднородной электронно-плазменной системы.

ВВЕДЕНИЕ

Диодный промежуток, заполненный нейтрализующим зарядом и пронизываемый электронным потоком, является одной из простейших моделей ограниченных плазменных систем. Подобная модель позволяет исследовать коллективные процессы в плазме и влияние граничных условий, приводящих к различным неустойчивостям в пучке [1, 2]. Интерес к такой системе со стороны нелинейной теории колебаний и волн определяется возможностью использовать ее как модель распределенной активной среды с глобальными связями.

Рассматриваемая нами модель плоского диодного промежутка является классической при рассмотрении неизлучательных неустойчивостей в электронно-плазменных системах [3, 4]. В 1944 г. Дж. Пирс [5] рассмотрел электростатическую неустойчивость полностью скомпенсированного ионным фоном пучка с большим током, обусловленную конечным продольным размером системы. Данная неизлучательная неустойчивость приводит к возбуждению волн пространственного заряда с нарастающей во времени амплитудой. Нарастание волн пространственного заряда завершается образованием виртуального катода, который формирует встречную электронную волну. Условия возникновения неустойчивости определяются модовым составом плазменных колебаний в пучке. Спектр одномерных волн в пространстве с пучком определяется из дисперсионного уравнения [2] (в потенциальном приближении)

$$k_{\parallel}^2 - \frac{\omega_p^2 k_{\parallel}^2}{(\omega - k_{\parallel} v_0)^2} = 0, \quad (1)$$

где k_{\parallel} – волновое число пучковой волны, ω_p и v_0 – плазменная частота и невозмущенная скорость пучка соответственно. В системе с увеличением тока пучка появляется область частот, в которой существует встречная пучку волна. Условие возникновения встречной волны определяет условие развития электростатической неустойчивости. Поток с виртуальным катодом можно интерпретировать как активную резонансную систему [6], в которой начальное возмущение плотности пространственного заряда усиливается на частоте $\sim 2\omega_p$.

Несмотря на свою простоту, система демонстрирует богатый набор динамических режимов на нелинейной стадии развития электростатической неустойчивости, включая детерминированный хаос [7–9]. В ряде работ (см., например, [10–14]) сложная динамика в системах с виртуальным катодом связывается с формированием и взаимодействием когерентных пространственно-временных структур в электронном пучке.

Здесь следует отметить, что при анализе сложного поведения и турбулентности, а также процессов структурообразования в электронно-плазменных системах необходимо учитывать нелинейность вышеназванных систем. Последнее требует специальных методов анализа образования и динамики когерентных структур, так как классические линейные методы анализа (например, спектральный анализ) не позволяют получить максимальную информацию о процессах, протекающих в нелинейной системе. В данной работе рассматривается методика применения одного из нелинейных методов анализа сложных процессов в распределенных системах – бикогерентности.

рентного вейвлетного преобразования, предложенного впервые в [15, 16].

Вейвлетный анализ, возникший сравнительно недавно, является мощным средством анализа динамики нелинейных систем и привлекает все большее внимание исследователей [17–20], в частности, он начинает использоваться для анализа сложной нелинейной динамики в плазме [21–24]. Применение вейвлетного анализа дает возможность разрешить и локализовать динамику различных масштабов, составляющих структуру сигнала, во времени. Вейвлетное преобразование позволяет избавиться от одного из недостатков применения спектрального анализа для исследования турбулентности и хаоса: разложения анализируемого сигнала по гармоническим функциям, в то время как нелинейные уравнения, описывающие сложные явления в распределенных системах, не обладают гармоническими собственными модами.

Биспектры (или бикогерентность) характеризуют фазовые соотношения (фазовую связь) между различными частотными составляющими, присутствующими в сигнале (см., например, [25]). О фазовой связи можно говорить в том случае, когда в анализируемом сигнале одновременно присутствуют две частоты – ω_1 и ω_2 , сумма (или разность) которых, а также сумма фаз ϕ_1 и ϕ_2 этих частотных компонент остается постоянной в течение некоторого промежутка времени. Использование вейвлетной бикогерентности позволяет выявить внутреннюю структуру пространственно-временных данных, определяемую фазовой связью, а также изменения этой структуры с течением времени. В связи с этим вейвлетная бикогерентность представляется удачным методом выделения и анализа формирующихся в пространственно-распределенных системах когерентных структур.

В представленной работе рассматриваются результаты численного моделирования влияния неоднородности ионного фона на сложную пространственно-временную динамику электронного пучка со сверхкритическим током в плоской геометрии. Предложена методика выделения когерентных структур из пространственно-временных данных на основе бикогерентного вейвлетного анализа. С помощью предложенной методики анализируются формирующиеся в пучке пространственно-временные структуры, которые определяют сложную хаотическую динамику исследуемой неоднородной электронно-плазменной системы.

В разд. 1 формулируются математическая модель и методика численного моделирования. В разд. 2 обсуждаются характеристики нелинейной динамики системы. Введение в вейвлетную бикогерентность дается в разд. 3, где собраны основные понятия вейвлетного и бикогерентного

вейвлетного анализа. Описание динамики пространственных структур на основе выделения когерентных структур с помощью вейвлетной бикогерентности приводятся в разд. 4.

1. ИССЛЕДУЕМАЯ МОДЕЛЬ

Исследуемая система представляет собой диодный промежуток, образованный двумя плоскими электродами с одинаковыми потенциалами, находящимися на расстоянии L друг от друга. Область длины Δx_i , начинающаяся с точки с координатой x_i , заполнена неподвижным ионным фоном с концентрацией n_i . Электронный поток с плотностью пространственного заряда $\rho_0 = n_0 e$ инжектируется в диодный промежуток с постоянной скоростью v_0 . Управляющими параметрами системы являются параметр Пирса

$$\alpha = \omega_p L / v_0, \quad (2)$$

который представляет собой невозмущенный угол пролета по плазменной частоте и зависит от тока пучка I как $\alpha \sim \sqrt{I}$, параметр неоднородности

$$n = n_i / n_0 \quad (3)$$

и геометрические параметры неоднородности ионного слоя x_i и Δx_i . Последний параметр не изменялся и был положен равным $0.2L$. Отметим, что в случае $n = 1$ и $x_i = 0$, $\Delta x_i = L$ (“классический” диод Пирса) неустойчивость в потоке возникает при $\alpha > \pi$, и в системе формируется виртуальный катод [5, 26].

Представляя поток в плоской геометрии совокупностью заряженных листов, динамику пространственного заряда в диодном промежутке можно описать следующей системой уравнений.

Введем безразмерные переменные, обозначенные штрихом возле соответствующей величины и связанные с размерными переменными следующими соотношениями:

$$\rho = \rho_0 \rho', \quad v = v_0 v', \quad \phi = v_0^2 \phi' / \eta, \\ x = Lx', \quad t = Lt' / v_0.$$

Для каждого j -го листа решались нерелятивистские уравнения движения (штрихи над безразмерными переменными опускаем)

$$\frac{dx_j}{dt} = v_j, \quad \frac{dv_j}{dt} = \frac{\partial \phi}{\partial t} \Big|_{x=x_j}, \quad (4)$$

где x_j и v_j – координата и скорость j -го листа соответственно, $\phi(x, t)$ – потенциал поля пространственного заряда.

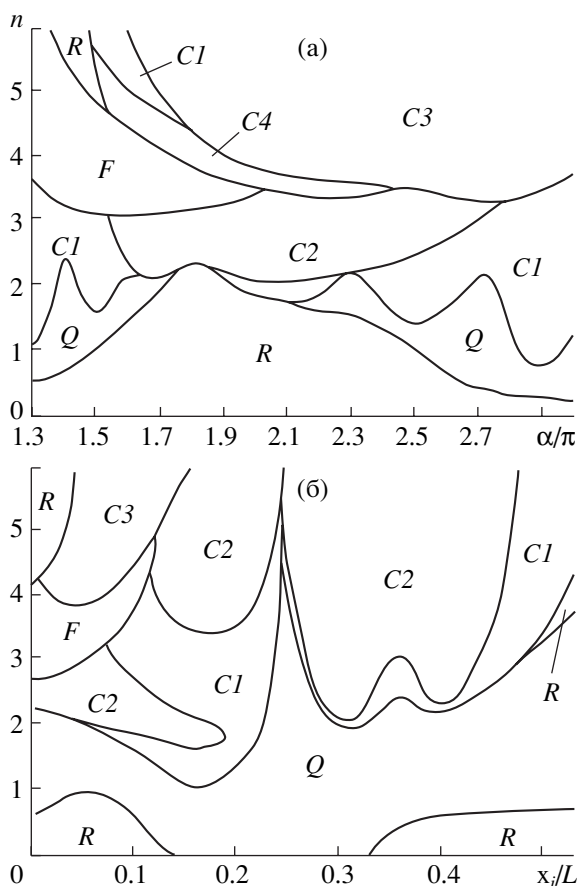


Рис. 1. Разбиение плоскостей параметров: ток пучка α – плотность ионного фона n при $x_i/L = 0.05$ (а) и координата ионного слоя x_i – плотность ионного слоя n при $\alpha = 1.75\pi$ (б) на характерные режимы колебаний в диодном промежутке со сверхкритическим током с неоднородным распределением ионного фона.

Для нахождения поля пространственного заряда в электростатическом приближении решалось уравнение Пуассона

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = \alpha^2 [\rho(x) - \rho_i(x)] \quad (5)$$

с граничными условиями $\phi(0) = \phi(1) = 0$. Здесь $\rho(x)$ – распределение плотности пространственного заряда, определяемое с помощью “particle-in-cell” метода (метода “частиц в ячейке”) [27]. Функция $\rho_i(x)$ описывает распределение нейтрализующего заряда неподвижного неоднородного ионного фона в системе. В нашем случае распределение имеет вид

$$\rho_i(x) = \begin{cases} ne & \text{при } x \geq x_i \text{ и } x \leq x_i + \Delta x_i, \\ 0 & \text{при } x < x_i \text{ и } x > x_i + \Delta x_i. \end{cases} \quad (6)$$

Основные параметры численной схемы (см., например, [28]), такие как число узлов пространственной сетки N_C и число частиц на ячейку в не-

возмущенном состоянии n_0 , были выбраны как $N_C = 800$ и $n_0 = 24$ (это соответствует числу частиц в расчетной области в невозмущенном состоянии $N = 19200$). Выбор вышеназванных параметров численной схемы обусловлен достижением необходимой точности и адекватности расчетов для анализа сложных нелинейных процессов, включая детерминированный хаос, в исследуемой электронно-плазменной системе (см., например, [27, 29]).

Решение уравнений движения осуществлялось с помощью схемы с перешагиваниями [27, 30]; для интегрирования уравнения Пуассона использовался метод распространения вектора ошибки [31].

2. НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА СИСТЕМЫ

Рассмотрим нелинейную динамику исследуемой системы при изменении управляющих параметров – параметра Пирса α и параметров неоднородности ионного фона n и x_i . Характерные режимы, реализующиеся в системе, показаны на рис. 1. На нем представлены карты режимов на плоскости управляющих параметров (α, n) и (x_i, n) .

Динамические режимы определялись по колебаниям потенциала $\phi(x, t)$ во времени в плоскости $x = x_\phi = 0.25L$. Для диагностики режимов колебаний были получены зависимости потенциала $\phi(x_\phi, t)$ для различных значений управляющих параметров. По временным реализациям строились спектры мощности колебаний и восстанавливались фазовые портреты колебаний. Для восстановления фазовых портретов использовался метод Такенса [32], сводящийся к построению фазовых векторов вида

$$\mathbf{R} = \{\phi(t), \phi(t-T), \dots, \phi[t-(d-1)T]\}, \quad (7)$$

где $\phi(t)$ – колебания потенциала в плоскости $x = x_\phi$, T – время задержки и d – размерность пространства вложения ($d = 2$ соответствует проекции аттрактора на плоскость). На рис. 2 представлены полученные результаты для различных динамических режимов, реализующихся в системе.

Из рассмотрения карт режимов (рис. 1) и характеристик колебаний потенциала (рис. 2) видно, что в системе наблюдается сложная смена различных типов колебательной динамики при изменении тока пучка α , плотности n и расположения ионного слоя x_i .

Для малой степени неоднородности ($n < 1.0$ – 2.0) колебания виртуального катода регулярны (область, обозначенная знаком “R” на картах режимов; рис. 2а, построенный при управляющих параметрах $\alpha = 1.75\pi$, $n = 0.5$, $x_i = 0.05L$). Рост плотности ионного слоя приводит к возникновению квазипериодических движений в системе (область Q; рис. 2б ($\alpha = 1.34\pi$, $n = 1.0$, $x_i = 0.05L$)). При смещении ионного слоя к правой границе системы область квазипериодической динамики на плоскости управляющих параметров расширяется.

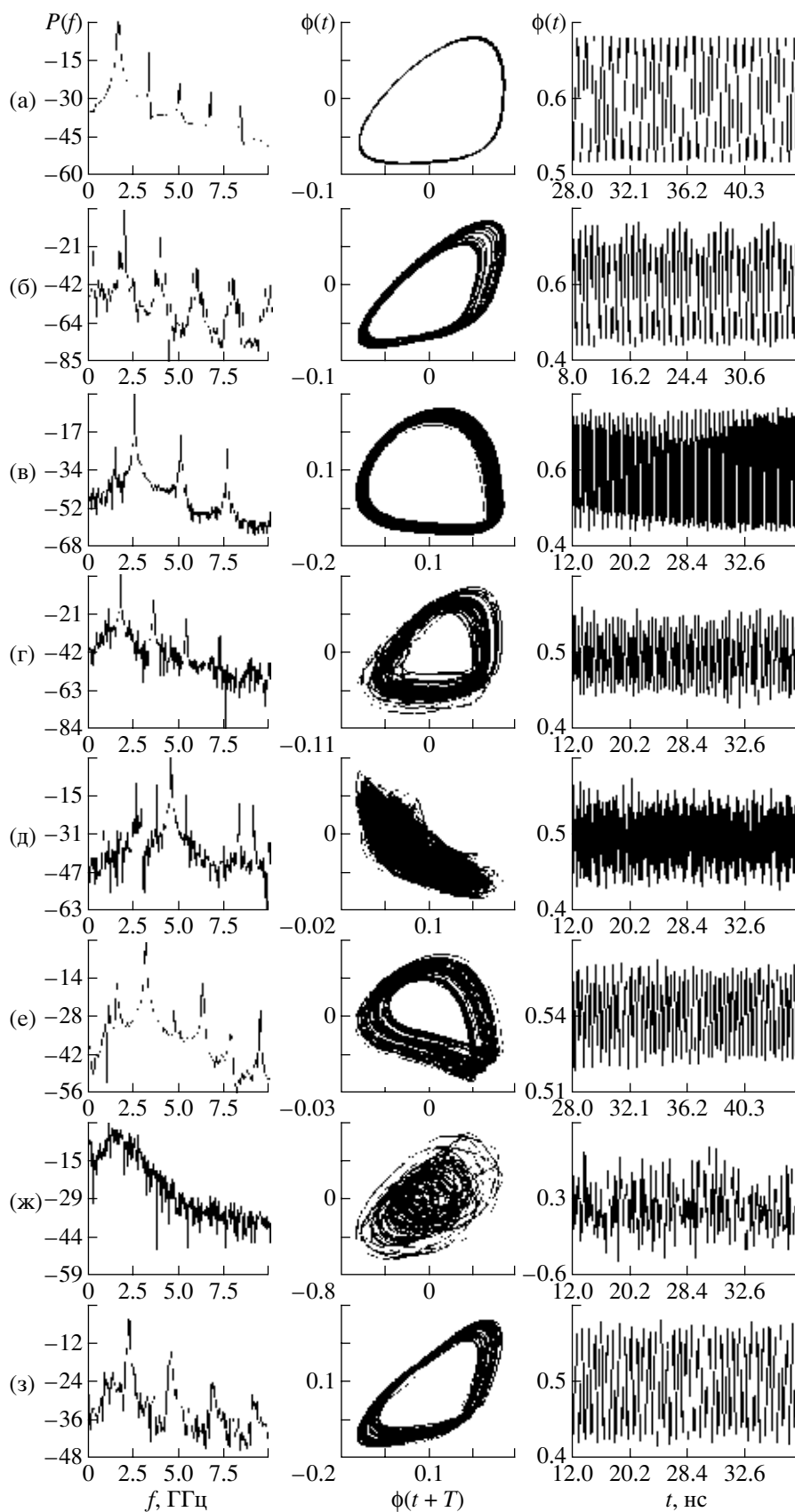


Рис. 2. Спектры мощности, фазовые портреты и временные реализации колебаний потенциала $\phi(t)$ в плоскости $x/L = 0.25$ для различных динамических режимов, реализующихся в системе.

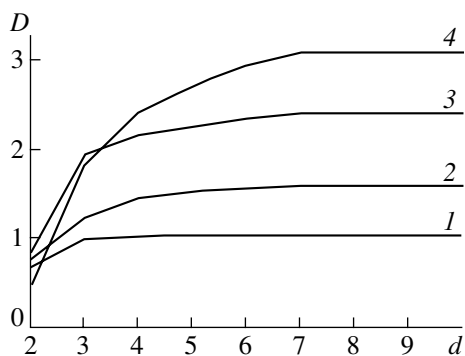


Рис. 3. Корреляционная размерность D аттрактора как функция размерности пространства вложения d для различных характерных режимов генерации. Здесь кривая 1 соответствует режиму C1, 2 – C2, 3 – C3, 4 – C4.

Дальнейшее увеличение величины n приводит к возникновению различных типов хаотической динамики электронных волн в диодном промежутке с неоднородным распределением ионного фона. Область C1 соответствует слабохаотическим колебаниям (рис. 2в; $\alpha = 2.86\pi$, $n = 2.0$, $x_i = 0.05L$), возникающим в результате разрушения квазипериодических движений. При этом в спектре мощности наблюдаются пики на двух несоизмеримых базовых частотах, которые наследуются от квазипериодического режима. Аттрактор представляет собой узкую ленту в фазовом пространстве. С ростом степени неоднородности ионного фона (величины n) на базе режима C1 возникает новый хаотический режим C2, который характеризуется увеличением нерегулярности колебаний в системе и, как следствие, ростом шумового пьедестала в спектре мощности; аттрактор в фазовом пространстве представляет собой широкую ленту (рис. 2г; $\alpha = 2.0\pi$, $n = 2.5$, $x_i = 0.05L$). При величинах $x_i < 0.2$ в узком диапазоне управляющих параметров, соответствующих области C4 карты режимов, наблюдаются развитые хаотические колебания, характеристики которых приведены на рис. 2д, построенном при $\alpha = 2.0\pi$, $n = 3.5$, $x_i = 0.05L$. В спектре мощности имеет место высокий шумовой пьедестал, медленно спадающий с ростом частоты, на фоне которого наблюдаются пики базовых частот и их гармоник. Фазовый портрет колебаний однороден и сильно зашумлен.

Для количественной оценки различия хаотических режимов определялась корреляционная размерность хаотических аттракторов D с помощью алгоритма Грассбергера и Прокаччио [33, 34]. При этом корреляционная размерность аттрактора D есть функция масштаба наблюдения ε :

$$D(\varepsilon) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln C(\varepsilon)}{\ln \varepsilon}, \quad (8)$$

где $C(\varepsilon)$ – число пар точек, расстояние между которыми в фазовом пространстве меньше ε (редуцированный корреляционный интеграл):

$$C(\varepsilon) = \frac{1}{MN} \sum_{j=1}^M \sum_{i=1, i \neq j}^N H(\varepsilon - |\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|); \quad (9)$$

здесь M – число точек редукции, N – число точек во временной реализации, H – функция Хевисайда, \mathbf{x} – вектор состояния в фазовом пространстве, восстанавливаемый по методу Такенса. При расчетах использовалось число отсчетов во временной реализации $N = 200000$, а число точек редукции – $M = 10000$. При этом размерность является также функцией размерности пространства вложения d , в котором восстанавливается фазовый вектор \mathbf{x} (см. формулу (7)).

На рис. 3 показаны зависимости корреляционной размерности аттрактора от размерности пространства вложения d для различных характерных режимов колебаний в исследуемой системе. Сразу отметим, что во всех случаях имеет место насыщение размерности аттракторов с ростом размерности пространства вложения d . Это свидетельствует о динамической природе хаотических процессов в диодном промежутке со сверхкритическим током и неоднородным ионным фоном, так как для шумовых колебаний (в том числе и тогда, когда шум обусловлен численными эффектами) размерность D имеет тенденцию увеличиваться пропорционально размерности пространства вложения d [35, 36].

В режиме слабохаотических колебаний C1, когда аттрактор представляет собой узкую ленту в фазовом пространстве, размерность хаотического множества составляет величину $D_{C1} = 1.04 \pm 0.01$. Размерность является дробной величиной, что характерно для динамического хаоса. Малое значение размерности в режиме C1 говорит о том, что аттрактор представляет собой очень узкую ленту в фазовом пространстве, размерность которой слабо отличается от размерности аттрактора регулярных колебаний (предельного цикла) $D_R = 1.0$ ($D_{C1} - D_R = 0.04$). Однако, с увеличением нерегулярности колебаний (с переходом к хаотическому режиму C2) размерность хаотического аттрактора возрастает до значения $D_{C2} = 1.62 \pm 0.01$. Это свидетельствует о большей сложности колебаний – аттрактор теперь представляет широкую ленту в фазовом пространстве ($D_{C2} - D_R = 0.62$). В случае развитых хаотических колебаний (режим C4) размерность хаотического аттрактора существенно больше, чем в предыдущих режимах, и равна $D_{C4} = 3.12 \pm 0.02$.

Также на плоскости управляющих параметров выделен “клев”, обозначенный буквой “F”, в котором происходит резкое увеличение частоты ко-

лебаний в электронном пучке. Соответствующие характеристики колебаний для этого случая представлены на рис. 2е, построенном при $\alpha = 1.75\pi$, $n = 3.5$, $x_i = 0.05L$. Он построен при том же токе пучка, что и рис. 2а, но при существенно большей плотности ионного слоя. Из сравнения спектров мощности в обоих случаях видно, что имеет место увеличение базовой частоты генерации примерно в 2 раза.

Зависимости базовой частоты в спектре колебаний от тока пучка и плотности ионного слоя для случая $x_i/L = 0.05$ представлены на рис. 4.

Из рис. 4а, на котором представлены зависимости базовой частоты от параметра Пирса (тока пучка) при различных величинах n , видно, что при малой степени неоднородности (кривая 1, $n = 0.5$) частота меняется линейно с изменением α . Это вполне понятный результат, так как в диодном промежутке соднородным распределением ионного фона частота f колебаний виртуального катода определяется плазменной частотой ω_p электронного пучка $f \approx \omega_p/\pi$ (см., например, [37–39]). Учитывая определение параметра Пирса (2), понятно, что частота колебаний в случае слабой неоднородности $f \sim \alpha$, что и показывает численный эксперимент. При увеличении степени неоднородности (кривая 2, $n = 2.5$) зависимость $f(\alpha)$ отклоняется от линейной, причем с увеличением параметра Пирса частота уменьшается по сравнению со случаем слабой неоднородности (кривая 1). Ситуация принципиально меняется при дальнейшем увеличении степени неоднородности (кривая 3, $n = 3.5$). При больших значениях плотности нейтрализующего ионного слоя частота колебаний в пучке при значениях $\alpha < 2.1\pi$ существенно больше частоты в случае малых n . Заметим также, что при $\alpha \sim 2.1\pi$ частота генерации уменьшается, а затем испытывает еще один скачок до величины $f \approx 6$ ГГц. При дальнейшем увеличении тока пучка (величине α) при больших n базовая частота в спектре генерации резко падает.

Это также иллюстрирует рис. 4б, на котором представлены зависимости $f(n)$ при различных значениях тока пучка α из области F на карте режимов (рис. 1а). Видно, что при достижении величины n некоторого критического значения n_{cr1} , базовая частота в спектре колебаний резко возрастает примерно в 2 раза. Критическое значение плотности n_{cr1} увеличивается с увеличением тока пучка, что хорошо видно из сравнения кривых, построенных для различных значений параметра Пирса α .

С дальнейшим ростом плотности n ионного слоя частота несколько уменьшается, затем наблюдается провал на графике $f(n)$, и далее имеет место еще один скачок частоты. При этом частота в этом случае превышает частоту колебаний при $n \approx n_{cr1}$. При больших значениях плотности

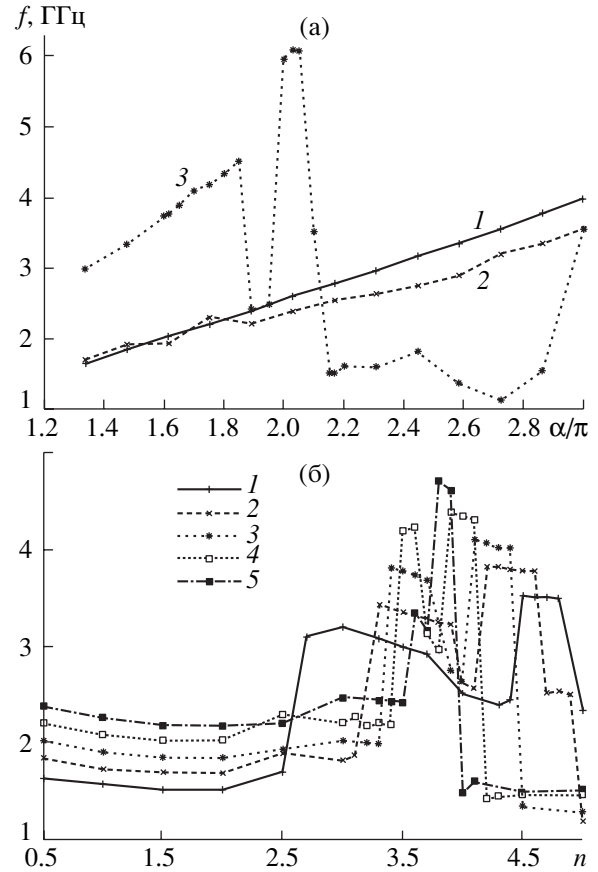


Рис. 4. а – Зависимости частоты генерации от параметра Пирса α при различных значениях n : 1 – $n = 0.5$; 2 – $n = 2.5$; 3 – $n = 3.5$; б – зависимости частоты генерации от плотности ионного слоя n при различных значениях параметра Пирса: 1 – $\alpha = 1.34\pi$; 2 – $\alpha = 1.48\pi$; 3 – $\alpha = 1.61\pi$; 4 – $\alpha = 1.75\pi$; 5 – $\alpha = 1.89\pi$.

ионов $n_{cr2} > n_{cr1}$ происходит резкое уменьшение частоты колебаний в электронном пучке. Величина критической плотности n_{cr2} в отличие от величины n_{cr1} уменьшается с ростом параметра Пирса, т.е. с увеличением тока пучка область возрастания частоты колебаний в электронном пучке с виртуальным катодом сужается, одновременно растет частота генерации при плотностях $n \in (n_{cr1}, n_{cr2})$.

Заметим также, что наиболее интенсивная гармоника в спектре мощности колебаний в диапазоне управляющих параметров, принадлежащая области $S4$ на карте режимов, соответствует базовой частоте генерации в режиме F .

При очень больших плотностях ионного слоя, располагающегося вблизи плоскости инжекции электронного пучка, в системе возникают сильно нерегулярные колебания без выделенной базовой частоты с быстро спадающим с ростом частоты спектром мощности (область $S3$; рис. 2ж; $\alpha = 2.4\pi$, $n = 5.0$, $x_i = 0.05L$). Фазовый портрет коле-

баний в данном случае однороден, размерность аттрактора насыщается с ростом размерности пространства вложения d и равна $D_{C3} = 2.43 \pm 0.02$ (рис. 3).

Однако в случае неоднородности с большими значениями плотности $n > 3$, располагающейся вдали от плоскости инъекции ($x_i/L > 0.2$), динамика системы вблизи плоскости инъекции упрощается. Для иллюстрации этого на рис. 2з приведены характеристики колебаний для случая $\alpha = 3.0\pi$, $n = 4.5$, $x_i = 0.25L$. Вид фазового портрета и вид спектра мощности аналогичны виду этих характеристик для режима C2 (рис. 2г), что позволяет классифицировать наблюдающийся в этом случае динамический режим как режим C2.

Рассмотрим, с чем связана сложная перестройка различных режимов колебаний с изменением управляющих параметров системы – тока пучка и неоднородности распределения ионного фона. Можно предположить, следуя уже упомянутым во Введении работам [10, 11, 13, 14], что вышеописанное поведение системы определяется особенностями динамики и взаимодействия формирующихся в системе когерентных структур. Воспользуемся для анализа процессов формирования и взаимодействия когерентных структур в электроном пучке вейвлетной бикогерентностью.

3. ВЕЙВЛЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ВЕЙВЛЕТНАЯ БИКОГЕРЕНТНОСТЬ

Непрерывное вейвлетное преобразование осуществляется путем свертки

$$W(s, t_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) \psi_{s, t_0}^*(t) dt, \quad (10)$$

анализируемого сигнала $g(t)$ с двухпараметрической вейвлетной функцией $\psi_{s, t_0}(t)$, которая получается из материнского вейвлета $\psi_0(t)$ (знак “*” означает комплексное сопряжение)

$$\psi_{s, t_0}(t) = \frac{1}{\sqrt{s}} \psi_0\left(\frac{t-t_0}{s}\right). \quad (11)$$

Параметр s , называемый масштабом вейвлетного преобразования, отвечает за ширину вейвлета, а t_0 – параметр сдвига, определяющий положение вейвлета на оси t . Множитель $1/\sqrt{s}$ в соотношении (11) введен для того, чтобы все вейвлетные функции ψ_{s, t_0} имели единичную норму $\int_{-\infty}^{+\infty} (\psi_{s, t_0})^2 dx = 1$.

В качестве вейвлетной функции может быть выбрана любая функция, удовлетворяющая следующим основным условиям.

Условие локализации. Материнский вейвлет ψ_0 должен быть локализован как во временном, так и в частотном представлении. Для этого достаточно, чтобы функция ψ_0 была задана на конечном интервале и обладала достаточной регулярностью.

Условие допустимости. Материнский вейвлет должен быть выбран таким образом, чтобы его фурье-образ $\hat{\psi}_0(\omega)$ удовлетворял условию

$$C_\psi = 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\hat{\psi}_0(\omega)|^2}{\omega} d\omega < \infty. \quad (12)$$

Последнее условие (12) для всех практических целей эквивалентно требованию нулевого среднего

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi_0(t) dt = 0 \quad \text{или} \quad \hat{\psi}_0(0) = 0, \quad (13)$$

что следует из соотношения (12).

Заметим, что непрерывное вейвлетное преобразование, записанное в виде (10), есть разложение по неортогональному базису ψ_{s, t_0} . Однако, если условие допустимости (12) выполняется, существует обратное вейвлетное преобразование

$$g(t) = \frac{1}{C_\psi} \int_0^{+\infty} \frac{ds}{s^2 \sqrt{s}} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_0\left(\frac{t-t_0}{s}\right) W(s, t_0) dt_0. \quad (14)$$

Бикогерентное вейвлетное преобразование представляет собой расчет вейвлетного биспектра, являющегося обобщением вейвлетного преобразования. Нормализованный биспектр (бикогерентность) характеризует фазовые соотношения (фазовую связь) между различными частотными составляющими, присутствующими в сигнале. О фазовой связи можно говорить в том случае, когда в анализируемом сигнале одновременно присутствуют две частоты – ω_1 и ω_2 , сумма (или разность) которых, а также сумма фаз ϕ_1 и ϕ_2 этих частотных компонент остается постоянной в течение некоторого промежутка времени. Бикогерентность является количественной мерой такой фазовой связи. Величина бикогерентности является функцией частот ω_1 и ω_2 и должна быть близка к единице, если анализируемый сигнал содержит три частоты ($\omega_1, \omega_2, \omega$), удовлетворяющие соотношениям

$$\omega_1 + \omega_2 = \omega, \quad \phi_1 + \phi_2 = \phi + \text{const}. \quad (15)$$

В случае, когда соотношение (15) не выполняется, бикогерентность, определенная относительно частот ω_1, ω_2 и ω , равна нулю.

Дело в том, что при нахождении фурье или вейвлетного спектра анализируемый процесс считается результатом наложения в любой момент времени

статистически некоррелированных процессов на различных временных масштабах и производится оценка распределения мощности среди этих временных масштабов. При этом исследуются только линейные механизмы, определяющие динамику процесса, так как фазовые соотношения между частотными составляющими исключаются. Фактически можно сказать, что имеющейся информации в фурье или вейвлетном спектре достаточно для полного статистического описания гауссовского процесса с известным средним значением. Однако, когда анализируемый сигнал содержит сложную структуру различных временных гармоник и порождается *нелинейной* динамической системой, то мощности только фурье или вейвлетного спектра уже недостаточно для полного описания процесса. В этом случае можно предположить, что в сигнале появляется фазовая связь между некоторыми частотными компонентами. Информацию, касающуюся наличия нелинейностей, позволяют получить спектры более высокого порядка, в частности спектр третьего порядка или биспектр. Поэтому обобщение биспектра на вейвлетное преобразование позволит анализировать такие принципиально нелинейные явления как временную динамику фазовой связи между теми или иными компонентами в сигналах, а также выделять в наборах пространственно-временных данных когерентные структуры.

Введем по аналогии с фурье-биспектром [25, 40] вейвлетный взаимный биспектр, который определим как [16]

$$B_{hg}(s_1, s_2) = \int_T W_h^*(s, \tau) W_g(s_1, \tau) W_g(s_2, \tau) d\tau, \quad (16)$$

где

$$\frac{1}{s} = \frac{1}{s_1} + \frac{1}{s_2} \quad \text{или} \quad \omega_s = \omega_{s_1} + \omega_{s_2} \quad (17)$$

есть правило суммирования частот. Здесь частота $\omega_s = 2\pi/s$ соответствует масштабу s вейвлетного преобразования.

Вейвлетный взаимный биспектр есть мера фазовой связи на интервале времени T , которая проявляется между компонентами вейвлетных спектров W сигнала $g(t)$ на масштабах s_1 и s_2 и сигнала $h(t)$ на масштабе s . Тогда вейвлетный взаимный биспектр может быть интерпретирован как фазовая связь между волнами (вейвлетами), частоты которых удовлетворяют условию (17).

При анализе удобно пользоваться не только взаимным биспектром (16), но и понятием вейвлетной взаимной бикогерентности, которая опре-

деляется как нормализованный вейвлетный взаимный биспектр:

$$b_{hg}(s_1, s_2) = |B_{hg}(s_1, s_2)| \times \left(\int_T |W_g(s_1, \tau) W_g(s_2, \tau)|^2 d\tau \int_T |W_h(s, \tau)|^2 d\tau \right)^{-0.5}. \quad (18)$$

Величина взаимной бикогерентности может принимать в соответствии с определением (18) значения в интервале $[0, 1]$.

Важной характеристикой бикогерентного вейвлетного преобразования является суммированная бикогерентность, которая определяется как

$$b_\Sigma(s) = \sqrt{\frac{1}{N_s} \sum [b(s_1, s_2)]^2}, \quad (19)$$

где суммирование производится по всем масштабам s_1 и s_2 , удовлетворяющим условию (17); N_s – число слагаемых в сумме. Вводится также понятие полной бикогерентности, которая записывается в виде

$$b = \sqrt{\frac{1}{N_s} \sum \sum [b(s_1, s_2)]^2}, \quad (20)$$

где суммирование теперь уже производится по всем анализируемым масштабам s_1 и s_2 , и N_s – общее число суммируемых величин. Коэффициенты $1/N_s$ и $1/N_s$ необходимы для того, чтобы величины b_Σ и b принимали значения из интервала $[0, 1]$.

По найденным численно величинам вейвлетного взаимного биспектра полезно восстанавливать суммированный биспектр

$$B_\Sigma(s) = \sqrt{\frac{1}{N_s} \sum [B(s_1, s_2)]^2}, \quad (21)$$

где все обозначения совпадают с обозначениями, использующимися в формуле (19).

В связи с неоднозначностью выбора материнского вейвлета возникает вопрос о том, какой вейвлетной функцией $\psi_0(\eta)$ необходимо пользоваться при расчетах величин вейвлетной бикогерентности и вейвлетного взаимного биспектра. Наиболее удобным для дальнейшей интерпретации результатов, на наш взгляд, оказывается вейвлет Морлета [41], являющийся комплексным вейвлетом

$$\psi_0(\eta) = \pi^{-1/4} \exp(j\omega_0\eta) \exp(-\eta^2/2), \quad (22)$$

где ω_0 – параметр вейвлета. Обычно рассматривается морлет-вейвлет с параметром $\omega_0 = 6$. Морлет-вейвлет обладает хорошо локализованным в реальном и фурье-пространстве базисом, причем с увеличением ω_0 растет разрешение в фурье-пространстве, но ухудшается локализация во времени. Фактически морлет-вейвлет представляет собой

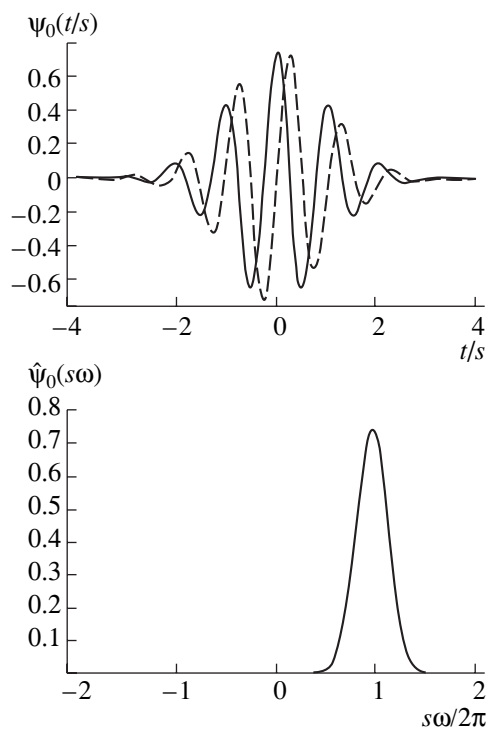


Рис. 5. Вид вейвлета Морлета ψ_0 и его фурье-образ $\hat{\Psi}_0$ (параметр $\omega_0 = 6$). Здесь сплошная линия – действительная и штриховая – мнимая часть вейвлета.

синусоидальную функцию, модулированную функцией Гаусса (рис. 5, на котором представлен вид вейвлета Морлета и его фурье-образ). Для вейвлетного и бикогерентного вейвлетного преобразования с базовым морлет-вейвлетом легко сопоставить масштабы вейвлетного преобразования s (или соответствующие им частоты ω_s) и длины волн Λ (или частоты $\omega = 2\pi/\Lambda$) преобразования Фурье. Это позволяет анализировать результаты вейвлетного бикогерентного анализа в привычных из фурье-анализа терминах частот и фаз сигналов.

4. КОГЕРЕНТНЫЕ СТРУКТУРЫ

Для анализа процессов в электронном пучке со сверхкритическим током вейвлетной бикогерентности будем исследовать пространственно-временные данные колебаний потенциала $\phi(x, t)$ поля пространственного заряда в диодном промежутке для различных характерных режимов колебаний в нем.

Рассмотрим вначале простейший случай – режим регулярных колебаний, реализующийся при небольших токах пучка α и малой степени неоднородности ионного фона (область R на карте режимов (рис. 1)). Соответствующее пространственно-временное распределение величины $\phi(x, t)$ для

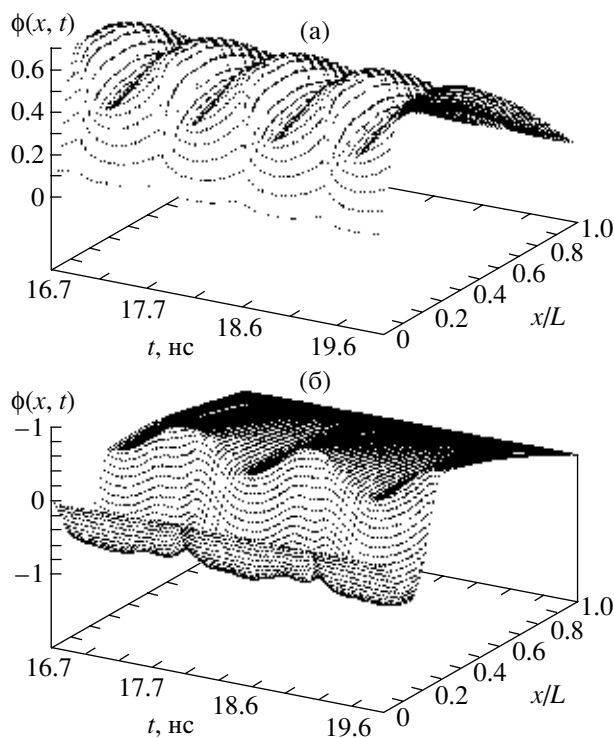


Рис. 6. Пространственно-временная динамика потенциала поля пространственного заряда в режиме (а) регулярных колебаний (область R на карте режимов) и (б) хаотических колебаний (режим $S3$).

значений параметров $\alpha = 1.54\pi$, $n = 0.5$ и $x_i = 0.05$ представлено на рис. 6а. В спектре колебаний потенциала во всех сечениях диодного промежутка в этом случае присутствуют колебания с базовой частотой $f_0 = 0.98$ ГГц.

Найдем полную бикогерентность b (20) данных по колебаниям потенциала $\phi(x, t)$ и гармонического сигнала с частотой, соответствующей базовой частоте в спектре мощности f_0 колебаний потенциала, т.е. в качестве сигнала $h(t)$ в соотношении (20) выбирается сигнал $a \sin 2\pi f_0 t$; сигнала $g(t)$ – колебания $\phi(x_{\text{fix}}, t)$ в некоторой фиксированной точке пространства $x = x_{\text{fix}}$. В качестве материнской вейвлетной функции при расчетах использовался вейвлет Морлета, который, как уже обсуждалось ранее, позволяет легко интерпретировать полученные результаты. На рис. 7а представлены результаты расчета величины полной бикогерентности в зависимости от координаты. Зависимость $b(x)$ является функцией с одним максимумом, который располагается вблизи плоскости инжекции. Отсюда видно, что наибольшая полная бикогерентность (т.е. максимальная фазовая связь между колебаниями потенциала и динамикой основного временного масштаба в системе) соответствует колебаниям потенциала в области $x/L \approx 0.1$. Последнее означает, что основная пространственно-временная структура, опре-

деляющая базовые временные и пространственные масштабы поведения рассматриваемой системы, локализована вблизи области $x/L \sim 0.1$.

Рассчитаем теперь суммированный вейвлетный биспектр $B_{\Sigma}(f)$ (см. соотношение (21)) пространственно-временных данных колебаний потенциала в диодном промежутке. При этом в качестве сигнала $h(t)$ выбираются колебания потенциала $\phi(x, t)$ в области $x/L = 0.1$, для которой максимальна величина полной бикогерентности процесса; в качестве сигнала $g(t)$ используются колебания потенциала $\phi(x, t)$ в различных сечениях диодного промежутка. Данная процедура позволяет определить области в пространстве, где имеет место сильная фазовая связь между временными колебаниями, т.е. возможно выделить и локализовать в пространстве формирующиеся в системе когерентные структуры.

Результаты расчета суммированного вейвлетного биспектра приведены на рис. 7б, на котором представлена проекция поверхности величины B_{Σ} в координатах (x, f) , где x – координата сечения диода, относительно которого рассчитывается бикогерентность, f – частоты, на которых определялась суммированная бикогерентность. Из рисунка видно, что на поверхности суммированной бикогерентности $B_{\Sigma}(x, f)$ четко выделяется область, где вейвлетная бикогерентность резко возрастает. Эта область, локализованная на плоскости (x, f) вблизи $x/L \sim 0.05-0.2$; $f \sim 0.8-1.2$ ГГц, определяет единственную пространственно-временную структуру в пучке, которая расположена вблизи плоскости инжекции (она пространственно ограничена областью $x/L < 0.2$) и имеет характерный временной масштаб $T = 1/f \sim 1$ нс. Заметим, что на поверхности наблюдается еще один максимум (высота которого примерно в 3 раза меньше максимума при $f \sim 1.9$ ГГц) на частоте $f \sim 3.8$ ГГц. Он связан с динамикой той же когерентной структуры и определяется квадратичной нелинейностью, а именно фазовой связью между временной динамикой базового масштаба T и его гармоники $T/2$.

При увеличении степени неоднородности системы (ростом плотности ионного слоя n) наблюдается резкий скачок частоты генерации в системе (область F на карте режимов). Проанализируем с помощью вейвлетной бикогерентности динамику системы в этом случае. Рассмотрим колебания потенциала $\phi(x, t)$ при тех же, что и в предыдущем случае, значениях тока пучка $\alpha = 1.54\pi$ и координаты расположения слоя $x_i = 0.05$, но существенно большей плотности ионов $n = 3.75$. На рис. 8 представлены соответствующая зависимость полной бикогерентности $b(x)$ колебаний потенциала в различных сечениях диодного промежутка x и гармонического сигнала с частотой, равной базовой частоте генерации, в данном случае $f_0 = 3.1$ ГГц, и поверхность суммированной бикогерентности $B_{\Sigma}(x, f)$.

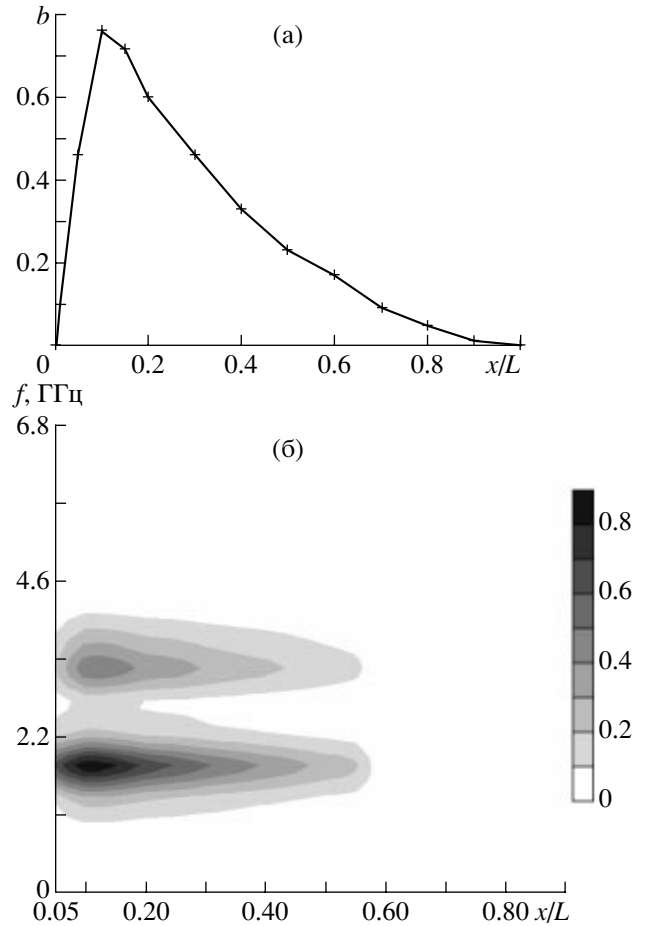


Рис. 7. а – Зависимость величины полной бикогерентности $b(x)$ от координаты и б – проекция поверхности суммированного биспектра $B_{\Sigma}(x/L, f)$, построенные для режима регулярных колебаний (режим R).

Из рис. 8а видно, что область высокой бикогерентности прижимается непосредственно к плоскости инжекции $x = 0$. Из распределения амплитуд коэффициентов суммированного вейвлетного биспектра вдоль пространства взаимодействия (рис. 8б) следует, что в системе, как и раньше, формируется только одна когерентная структура, определяющая поведение электронного потока. Однако, теперь она в пространстве взаимодействия располагается вблизи входной сетки диодного промежутка, занимая область $x/L \in (0.0, 0.1)$. Характерный временной масштаб динамики этой структуры примерно в 2 раза превышает характерный временной масштаб динамики системы в случае, малой степени неоднородности (предыдущий случай) и численно равен $T \approx 0.5$ нс. Как и в предыдущем случае, ярко выражена динамика временного масштаба второй гармоники базовой частоты, что свидетельствует о сильной нелинейности колебаний.

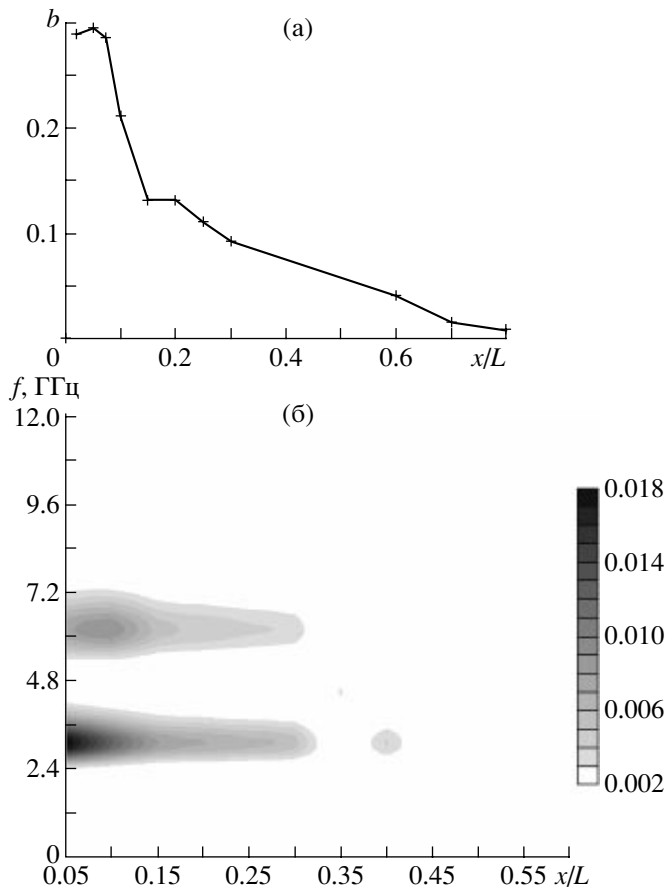


Рис. 8. а – Зависимость величины полной бикогерентности $b(x)$ от координаты и б – проекция поверхности суммированного биспектра $B_{\Sigma}(x/L, f)$, построенные для режима F .

Таким образом, в рассматриваемом случае увеличение степени неоднородности системы приводит к изменению условий формирования когерентной структуры, определяющей динамику электронного пучка. В результате такой перестройки внутренней структуры электронного пучка изменяется характерный пространственный масштаб Λ_F динамики единственной структуры. Он становится примерно в 2 раза меньше пространственного масштаба Λ_R когерентной структуры в режиме регулярных колебаний.

Известно [42], что для систем с виртуальным катодом имеет место связь между средним временем пролета τ_e отраженных от виртуального катода электронов и частотой генерации f , которая дается простым выражением $f \sim 1/\tau$. В нашем случае можно оценить время пролета для режима F как $\tau_F \sim \Lambda_F/v_0$, для режима R – как $\tau_R \sim \Lambda_R/v_0$. Отсюда следует, что частота генерации f_F в диоде с сильной неоднородностью ионного фона (режим F) связана с частотой генерации в случае малой не-

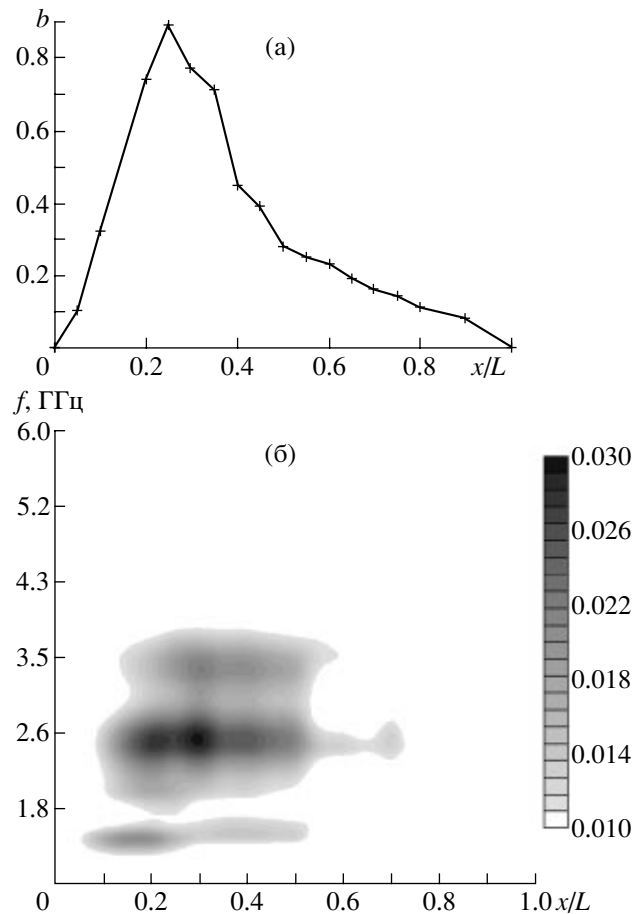


Рис. 9. а – Зависимость величины полной бикогерентности $b(x)$ от координаты и б – проекция поверхности суммированного биспектра $B_{\Sigma}(x/L, f)$, построенные для режима $C3$.

однородности f_R как $f_F \approx 2f_R$, что и наблюдается при численном моделировании.

Рассмотрим теперь режимы развитых хаотических колебаний в системе.

Исследуем вначале режим, реализующийся в диодном промежутке при большом токе пучка α и большой степени неоднородности n в системе при расположении ионного слоя вблизи плоскости инжекции (режим $C3$ на карте режимов (рис. 1)). Рассмотрим пространственно-временные колебания потенциала поля пространственного заряда при следующих значениях управляющих параметров: $\alpha = 2.125\pi$, $n = 4.0$, $x_i = 0.05$. Соответствующее распределение величины $\phi(x, t)$ представлено на рис. 6б. Заметим, что спектральный состав колебаний потенциала при переходе от одного сечения диода к другому в данном режиме практически не изменяется.

На рис. 9 приведены результаты расчета зависимости полной бикогерентности $b(x)$ колебаний потенциала и поверхность суммированной бико-

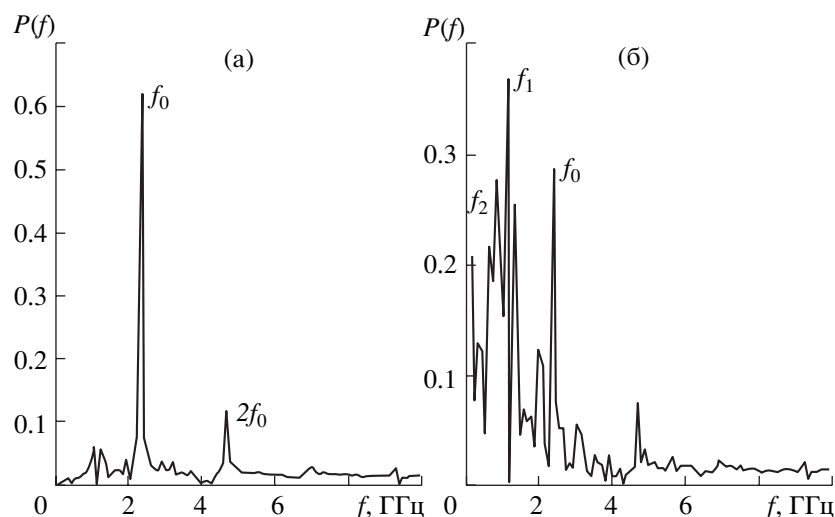


Рис. 10. Фурье-спектры мощности колебания потенциала поля пространственного заряда в различных сечениях диодного промежутка (масштаб нелогарифмический). Рисунок а соответствует сечению с координатой $x/L = 0.05$, рис. б – $x/L = 0.45$.

герентности $B_{\Sigma}(x, f)$. Из рис. 9а следует, что наибольшая полная бикогерентность соответствует колебаниям потенциала в области $x/L \approx 0.25$. Это означает, что в данном режиме основная пространственно-временная структура, определяющая характерные особенности поведения рассматриваемой системы, в первую очередь базовые временные и пространственные масштабы колебаний в пучке, локализована в области $x/L \sim 0.25$.

Расчет суммированного вейвлетного биспектра показал, что на поверхности $B_{\Sigma}(x, f)$ четко выделяются две области, где вейвлетная бикогерентность резко возрастает: область на плоскости (x, f) , локализованная вблизи $x/L \sim 0.2-0.4$; $f \sim 2.5$ ГГц и область $x/L \sim 0.1-0.2$; $f \sim 1.0$ ГГц. В каждой из этих областей, где коэффициенты вейвлетного биспектра велики, имеет место фазовая связь между колебаниями в различных сечениях диодного промежутка на соответствующих временных масштабах. Причем величина бикогерентности в первой области существенно превышает соответствующую величину во второй области. Каждую из этих областей на плоскости (x, f) можно связать со своей когерентной структурой, причем поведение каждой из которых определяет динамику электронного пучка в данном случае.

Из рис. 9б четко видно, что одна из структур (базовая, которая была определена нами из результатов расчета полной вейвлетной бикогерентности) занимает большую область в пространстве взаимодействия и имеет малый временной масштаб: $T_1 \approx 0.4$ нс. Вторичная структура имеет малый пространственный масштаб, располагаясь между плоскостью инжекции и базовой структурой. Ее характерный временной масштаб существенно больше и составляет $T_2 \approx 1.0$ нс. Можно предпо-

ложить, что взаимодействие между этими структурами, имеющими различные временные масштабы динамики, определяется особенностями сложной хаотической динамики электронного пучка в этом случае. Так, вторичная структура, временной масштаб которой T_2 существенно превышает масштаб T_1 , взаимодействуя с основной структурой, выполняет роль некоторой распределенной обратной связи, оказывающей воздействие на динамику электронного пучка. Последнее и приводит к хаотизации колебаний в электронном пучке в этом случае – она связана со сложным запаздывающим (из-за различных характерных временных масштабов) взаимодействием между когерентными структурами, формирующимися в системе.

Рассмотрим теперь режим, реализующийся в системе при большой плотности ионного слоя $n = 4.5$, который располагается вдали от плоскости инжекции в сечении с координатой $x_i/L = 0.25$. Параметр Пирса в рассматриваемом нами случае равен $\alpha = 3.0\pi$. Вид фурье-спектра мощности и фазового портрета колебаний в сечении $x/L = 0.25$ диодного промежутка соответствует режиму С2 на картах режимов (рис. 1 и рис. 2з, построенный при вышеуказанных значениях параметров по колебаниям потенциала в точке пространства взаимодействия $x/L = 0.25$).

В отличие от предыдущих случаев временная динамика поля пространственного заряда в различных точках диодного промежутка принципиально различна. Так, спектральный состав колебаний качественно и количественно меняется при продвижении вдоль пространства взаимодействия. Это иллюстрирует рис. 10, на котором представлены фурье-спектры мощности (в нелогариф-

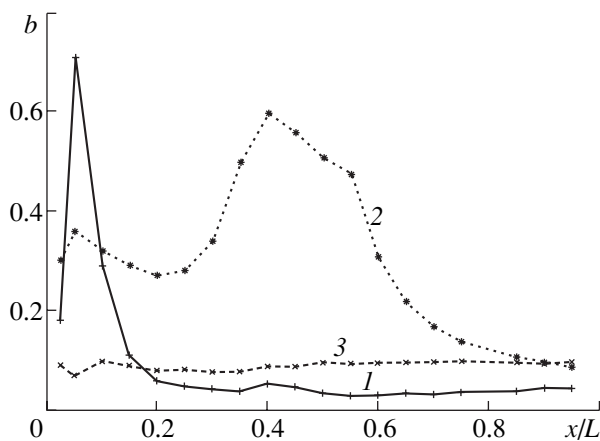


Рис. 11. Зависимости величины полной бикогерентности $b(x)$ от координаты, построенные при различных частотах гармонического сигнала. Кривая 1 соответствует частоте f_0 ; 2 — f_1 ; 3 — f_2 .

рифмическом масштабе) колебаний потенциала ϕ в точках с координатами $x/L = 0.05$ (рис. 10а) и $x/L = 0.45$ (рис. 10б). Вблизи плоскости инжекции колебания потенциала слабо хаотические, на фоне небольшого слабо развитого шумового пьедестала наблюдается ярко выраженный пик базовой частоты генерации $f_0 = 2.24$ ГГц в диоде и ее второй гармоники $2f_0$. Ситуация меняется при продвижении вдоль пространства взаимодействия к выходной сетке системы. В спектре мощности повышается шумовой пьедестал, который медленно спадает с ростом частоты. В низкочастотной части спектра ($f < f_0$) наблюдается появление спектральных составляющих, энергия которых в спектре превышает энергию частоты f_0 , которая также присутствует в спектре колебаний потенциала в центральной части пространства взаимодействия. Так, амплитуда доминирующей частоты в низкочастотной области спектра f_1 (рис. 10б) превышает амплитуду гармоники частоты f_0 в 1.57 раз.

Можно предположить, что такое изменение поведения системы, выражающееся в появлении пространственно развитых хаотических колебаний, определяется с качественной перестройкой внутренней структуры электронного потока в данном случае.

Рассмотрим пространственную динамику величины полной бикогерентности $b(x)$ колебаний потенциала поля $\phi(x, t)$ и гармонического сигнала. Будем рассматривать гармонические сигналы, частоты которых соответствуют характерным частотам в фурье-спектре мощности колебаний в различных точках пространства взаимодействия. Такими характерными частотами являются частота f_0 , которая соответствует основному временному масштабу в области инжекции электронного пучка, и частота f_1 , которая определяет характерный вре-

менный масштаб динамики в электронном пучке в центральной части пространства взаимодействия.

Результаты расчета представлены на рис. 11. Из него видно, что зависимости полной вейвлетной бикогерентности $b(x)$, построенные для частот гармонического сигнала, соответствующих различным характерным временным масштабам колебаний системы, имеют принципиально различный вид.

Распределение вдоль пространства взаимодействия полной бикогерентности колебаний потенциала и гармонического процесса с частотой f_0 (кривая 1 на рис. 11) показывает, что максимальная фазовая связь между колебаниями потенциала и динамикой временного масштаба $T_0 = 1/f_0$ имеет место в области $x/L < 0.1$. Эту область можно связать с пространственно-временной структурой, которая располагается вблизи плоскости инжекции и чья динамика определяет появление в спектре мощности частоты f_0 . Во всем остальном пространстве взаимодействия полная бикогерентность колебаний потенциала и гармоники с частотой f_0 мала и свидетельствует о слабой связи между динамикой этой когерентной структуры и колебаниями в остальном пространстве взаимодействия.

Аналогичная картина складывается при рассмотрении распределения $b(x)$ колебаний потенциала и гармонического процесса с частотой f_1 (кривая 2 на рис. 11). В этом случае максимум бикогерентности приходится на область $x \in (0.3L, 0.6L)$. Данную область логично связать с еще одной когерентной структурой, формирующейся в системе и имеющей характерный временной масштаб $T_1 = 1/f_1$. Заметим, что в данном случае величина полной бикогерентности в области формирования первой структуры достаточно велика. Это свидетельствует о том, что вторая структура оказывает достаточно сильное влияние на динамику первой структуры, в то время как обратного влияния, как мы установили выше, нет.

Таким образом, в рассматриваемом случае пространственно-временного хаоса в диодном промежутке с сильно неоднородным распределением ионного фона, анализируя только спектральный состав колебаний $P(f)$ и величину полной бикогерентности b в различных сечениях x/L пространства взаимодействия, удалось выделить когерентные структуры, формирующиеся в системе, а также выявить характерные особенности взаимодействия между ними. В основу диагностики пространственно-временных структур была положена сильная зависимость величины полной вейвлетной бикогерентности колебаний в системе и гармонического сигнала с частотой, соответствующей тому или иному характерному временному масштабу динамики системы, от координаты пространства взаимодействия.

Для сравнения на рис. 11 (кривая 3) приведена рассчитанная зависимость полной вейвлетной бикогерентности колебаний потенциала и гармонического сигнала с частотой, отличной от характерных частот в спектрах мощности, построенных по колебаниям потенциала в различных сечениях диодного промежутка. Для определенности был выбран сигнал с частотой f_2 , отмеченной в спектре мощности на рис. 10б. Из рисунка видно, что бикогерентность, а следовательно, и фазовая связь между колебаниями в системе и динамикой выбранного временного масштаба невелика и практически не зависит от координаты пространства взаимодействия. Аналогичная картина получается при выборе других частот для анализа. При этом меняется только величина бикогерентности, но не ее характер распределения в пространстве: $b(x) \approx \text{const}$.

Из последнего следует, что при анализе с помощью вейвлетной бикогерентности легко обнаружить базовые временные масштабы динамики исследуемой системы. Здесь же прослеживаются преимущества анализа пространственно-временных данных с помощью вейвлетной, а не фурье-бикогерентности. Дело в том, что при выделении из массивов данных информации о когерентных структурах с помощью фурье-бикогерентности рассмотренная нами методика потребует очень точного определения характерного временного масштаба, на который при этом будет еще наложено условие неизменности во времени. Вейвлетная бикогерентность для определения фазовой связи двух колебательных процессов (15) благодаря конечной ширине в фурье-пространстве материнского вейвлета (в нашем случае вейвлета Морлета, рис. 5) не требует точного определения характерного временного масштаба. Так, например, временной масштаб анализируемого процесса может меняться в достаточно широких пределах (а именно таких, чтобы ширина фурье-спектра колебаний временного масштаба была меньше ширины фурье-образа базисной вейвлетной функции на каждом из рассматриваемых масштабов наблюдения).

В заключение этого раздела проиллюстрируем полученные результаты по выделению когерентных структур из пространственно-временных данных физическими картинками динамики электронного пучка в диодном промежутке с неоднородным распределением ионного фона. Для этого исследуем пространственно-временные диаграммы электронного потока для вышерассмотренных случаев (рис. 12). Каждая линия на диаграммах соответствует траектории одной заряженной частицы. Сгущение траекторий соответствует сгусткам (электронным структурам) в электронном потоке.

В режиме регулярных колебаний (область R на карте режимов) вид пространственно-временной

диаграммы пучка (рис. 12а) качественно совпадает с “классическим” видом диаграммы электронного потока без ионного фона. На ней хорошо видно, что в электронном пучке на каждом периоде колебаний формируется единственный электронный сгусток – виртуальный катод, который колеблется как в пространстве, так и во времени и от которого отражается большая часть электронного потока обратно к плоскости инжекции. Максимум плотности пространственного заряда колеблющегося виртуального катода приходится на область $x/L \sim 0.1$, в которой большая часть электронов останавливается (их скорость $v \approx 0$) и поворачивает обратно. Это совпадает с результатами бикогерентного вейвлетного анализа, который определяет наличие когерентной структуры в системе в этой же области (ср. с рис. 7).

При увеличении степени неоднородности (повышения величины плотности ионного слоя n) и при переходе системы в режим F имеет место изменение динамики электронного пучка, что иллюстрирует рис. 12б. Из него видно, что в потоке, как и раньше, формируется только один сгусток электронов (виртуальный катод), однако теперь его колебания в пространстве происходят с очень малой амплитудой. Анализ данных с помощью вейвлетной бикогерентности (рис. 8) выявил уменьшение характерного пространственного масштаба когерентной структуры, формирующейся в этом режиме, по сравнению с режимом R . Действительно, максимум плотности пространственного заряда смещается к плоскости инжекции, в результате чего и наблюдается скачок частоты генерации в системе. Заметим, что такая перестройка внутренней структуры электронного потока происходит скачком, также скачком возрастает частота генерации в диодном промежутке (см. разд. 2). Хаотизация колебаний в пучке в этом случае (см. спектр мощности и фазовый портрет колебаний на рис. 2е) происходит за счет возмущающего влияния метастабильных частиц, находящихся в области $x/L \sim 0.2$ пространства взаимодействия в течение нескольких характерных периодов колебаний основной структуры (виртуального катода). Возвращаясь к плоскости инжекции, они оказывают влияние на пространственно-временную динамику виртуального катода в рассматриваемом режиме.

Ситуация меняется при переходе к режимам развитых хаотических колебаний. В режиме $S3$ плотность компенсирующего заряд электронного потока ионного слоя столь велика, что основная структура в пучке – отражающий от себя электроны виртуальный катод – “вытесняется” из ионного слоя и формируется на его границе. Это четко продемонстрировал бикогерентный анализ (рис. 9), выделив базовую когерентную структуру в электронном пучке в области $x/L \sim 0.3$. Одновременно между виртуальным катодом, находящимся вне ионного слоя, и входной сеткой диодного про-

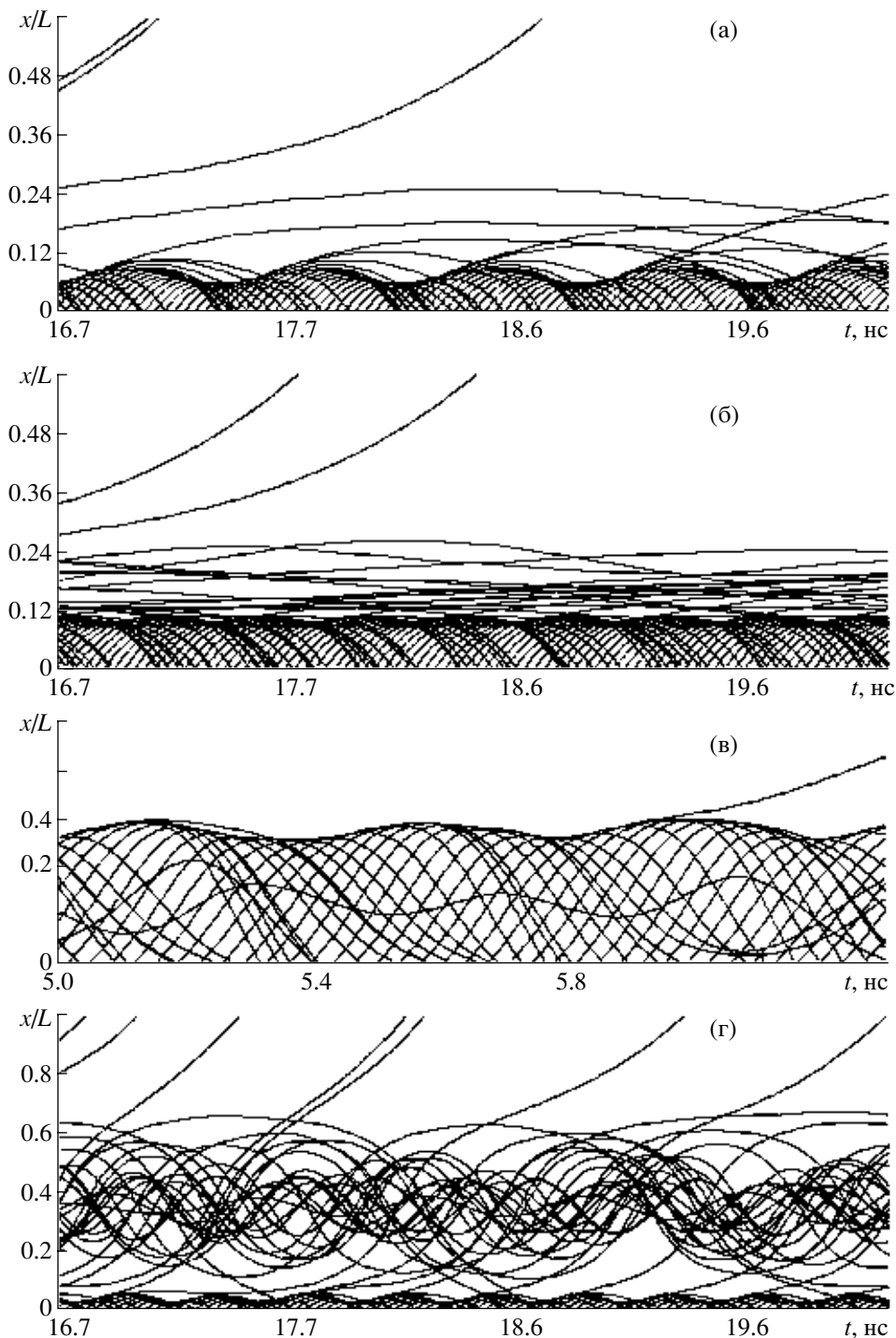


Рис. 12. Пространственно-временные диаграммы электронного потока в различных режимах колебаний.

межутка возникает потенциальная яма с экстремумом при $x/L \approx 0.05$, что хорошо видно на рис. бб. В нее захватываются частицы, отраженные от виртуального катода и имеющие небольшую скорость при подходе к выходной плоскости. Захваченные частицы, колеблющиеся в этой потенциальной яме, хорошо видны на пространственно-

временной диаграмме (рис. 12в). Пространственно-временная динамика в этом режиме подобна динамике потока в генераторе на виртуальном катоде триодного типа (см., например, [43]), в котором также имеет место двугорбый потенциальный профиль. В триоде с виртуальным катодом возникает "вихревая" автоструктура, состоящая

из захваченных в потенциальную яму частиц. Взаимодействие между виртуальным катодом и вихрем приводит к усложнению динамики в потоке, аналогично описанному в [43]. Вихревую автоструктуру можно связать со второй когерентной структурой, выделенной с помощью обработки данных вейвлетной бикогерентностью, так как расположение этих структур, а также характерные пространственные и временные масштабы их динамики близки.

В режиме С2 при расположении ионного слоя вдали от плоскости инжекции динамика электронного пучка сильно усложняется. Как видно из рис. 12г, в этом случае в диодном промежутке формируются два сгустка электронов – виртуальный катод вблизи плоскости инжекции и сгусток электронов, колеблющихся в потенциальной яме, связанной с наличием в середине пространства взаимодействия нейтрализующего слоя ионов с плотностью $n = 4.5$. Как несложно видеть, сопоставляя пространственно-временную диаграмму для этого случая с рис. 11, на котором представлены результаты расчета величины полной бикогерентности для различных характерных временных масштабов колебаний в системе, бикогерентный анализ позволил выделить обе характерных электронных структуры, формирующиеся в системе.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В представленной работе проведен анализ нелинейной динамики электронного пучка со сверхкритическим током в неоднородном ионном фоне. Практический интерес к диоду с неоднородным распределением положительного компенсирующего фона связан с тем, что данная система может служить простейшей моделью такого перспективного прибора мощной электроники, как виркатор с плазменным анодом [44].

В результате численного моделирования было показано, что данная система демонстрирует различные режимы колебаний, включая развитый пространственно-временной хаос. Было показано, что увеличение плотности заряда ионного фона выше некоторого предела, зависящего от геометрии задачи и тока электронного пучка, приводит к резкому росту частоты генерации в данной системе. Данный эффект особенно интересен в связи с возможностью повышения частоты генерации прибора с виртуальным катодом без увеличения тока пучка.

Используя бикогерентный вейвлетный анализ, удалось выделить из набора пространственно-временных данных когерентные структуры, формирующиеся в анализируемой нелинейной распределенной системе, где продемонстрированы различные режимы сложной колебательной динамики, а также оценить характерные временные масштабы и лока-

лизацию в пространстве найденных структур. Полученные с помощью расчета вейвлетной бикогерентности результаты находятся в хорошем соответствии с физической картиной внутренней динамики в электронном пучке со сверхкритическим током в диодном промежутке. Так, например, удалось связать формирующиеся когерентные структуры с электронными сгустками в пучке.

Подводя итоги данной работы, можно утверждать, что вышерассмотренная методика анализа данных позволит эффективно выделять когерентные структуры, определяющие динамику распределенных систем электронно-плазменной природы, демонстрирующих пространственно развитый хаос и электронную турбулентность.

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (проекты № 01-02-17392 и 00-15-96673).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Незлин М.В.* Динамика пучков в плазме. М.: Энергоиздат, 1982.
2. *Кузнев М.В., Рухадзе А.А.* Электродинамика плотных электронных пучков в плазме. М.: Наука, 1990.
3. *Child C.D.* // *Phys. Rev.* 1911. V. 32. P. 492.
4. *Langmuir I.* // *Ibid.* 1923. V. 43. P. 419.
5. *Pierce J.* // *J. Appl. Phys.* 1944. V. 15. P. 721.
6. *Блюх Ю.П., Магда И.И., Нейстемер С.И., Прокопенко Ю.В.* // *Физика плазмы.* 1992. Т. 18. С. 1191.
7. *Анфиногентов В.Г., Трубецков Д.И.* // *РЭ.* 1992. Т. 37. С. 2251.
8. *Kolinski H., Schamel H.* // *Phys. Rev. E.* 1995. V. 52. P. 4267.
9. *Matsumoto H., Yokoyama H., Summers D.* // *Phys. Plasmas.* 1996. V. 3. № 1. С. 177.
10. *Trubetskov D.I. et al.* // *CHAOS.* 1996. V. 6. № 3. P. 358.
11. *Привезенцев А.П., Фоменко Г.П.* // *Лекции по СВЧ электронике и радиофизике: 9-я зимняя школа-семинар.* Саратов, 1993. Саратов: Изд-во ГосУНЦ “Колледж”, 1999. С. 130.
12. *Bauer F., Schamel H.* // *Physica D.* 1992. V. 54. P. 235.
13. *Анфиногентов В.Г., Храмов А.Е.* // *Изв. вузов. Радиофизика.* 1998. Т. XLI. № 9. С. 1137.
14. *Храмов А.Е.* // *РЭ.* 1999. Т. 44. № 5. С. 551.
15. *van Milligen B.Ph., Hidalgo C., Sánchez E.* // *Phys. Rev. Lett.* 1995. V. 74. № 3. P. 395.
16. *van Milligen B.Ph., Sánchez E., Estrada T. et al.* // *Phys. Plasmas.* 1995. V. 2. № 8. P. 3017.
17. *Астафьева Н.М.* // *Успехи физ. наук.* 1996. Т. 166. № 11. С. 1145.
18. *Wavelets in Physics / Ed. by J.C. Van den Berg.* Cambridge: Cambridge University Press, 1998.
19. *Анфиногентов В.Г., Короновский А.А., Храмов А.Е.* // *Изв. РАН. Сер. физ.* 2000. Т. 64. № 12. С. 2383.

20. Короновский А.А., Храмов А.Е. // Письма в ЖТФ. 2001. Т. 27. № 1. С. 3.
21. Dose V., Venus G., Zome H. // Phys. Plasmas. 1997. V. 4. № 2. P. 323.
22. van Milligen B.Ph., Sánchez E., Estrada T. et al. // Proc. of 22th Europ. Conf. of Control. Fusion and Plasma Phys. Bournemouth, 1995. V. 19C. Pt IV. E.P.S. P. 165.
23. Heller M.V.A.P., Brasilio Z.A., Caldas I.L. et al. // Proc. of 25th EPS Conf. on Control. Fusion and Plasma Phys. Praha, 1998. ECA. V. 22C. P. 718.
24. Саркисян К.А., Скворцова Н.Н., Харчев Н.К., Миллиген Б.Ф. // Физика плазмы. 1999. Т. 25. С. 346.
25. Nicias C.L., Raghuvver M.R. // Proc. IEEE. 1987. V. 75. № 7. P. 869.
26. High-Power Microwave Sources / Ed by V.L. Granatstein and I. Alexeff. Boston: Artech House, 1987 (Chapters 13 and 14).
27. Birdsall C.K., Langdon A.B. Plasma Physics, via Computer Simulation. New York: McGraw-Hill, 1985.
28. Verboncoeur J.P., Alves M.V., Vahedi V., Birdsall C.B. // J. Comp. Phys. 1992. V. 104. P. 321.
29. Маханьков В.Г., Полляк Ю.Г. // ЖТФ. 1976. Т. XLVI. Вып. 3. С. 439.
30. Morey I.J., Birdsall C.B. // IEEE Trans. Plasma Sci. 1990. V. 18. № 3. P. 482.
31. Роуч П. Вычислительная гидродинамика. М.: Мир, 1980.
32. Takens F. // Lect. Notes in Math. Warwick: Springer-Verlag, 1980. V. 898. P. 366.
33. Grassberger P., Procaccia J. // Phys. Rev. Lett. 1983. V. 50. P. 346.
34. Андрушкевич А.В., Кипчатов А.А., Красичков Л.В. и др. // Физика. Сб. статей (Программа "Университеты России") / Под ред. А.Н. Тихонова, В.А. Садовниченко и др. М.: Изд-во МГУ, 1994. С. 32.
35. Шустер Г. Детерминированный хаос. М.: Мир, 1988.
36. Берже П., Помо И., Видаль К. Порядок в хаосе. О детерминистическом подходе к турбулентности. М.: Мир, 1991.
37. Диденко А.Н. // ДАН СССР. 1991. Т. 321. № 4. С. 727.
38. Диденко А.Н., Рауциков В.И. // Физика плазмы. 1992. Т. 18. С. 1182.
39. Kadish A., Faehl R.J., Snell C.M. // Phys. Fluids. 1986. V. 29. № 12. С. 4192.
40. Малахов А.Н. Кумулятивный анализ негауссовых случайных процессов и их преобразований. М.: Сов. радио, 1978.
41. Grossman A., Morlet J. // SIAM J. Math. Anal. 1984. V. 15. № 4. P. 273.
42. Привезенцев А.П., Фоменко Г.П., Филипенко Н.М. // ЖТФ. 1981. Т. 51. № 6. С. 1161.
43. Анфиногентов В.Г., Храмов А.Е. // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1998. Т. 6. № 1. С. 9.
44. Селемир В.Д., Алехин Б.В., Ватрунин В.Е. и др. // Физика плазмы. 1994. Т. 20. С. 689.