

01

## **Об эффективном анализе перехода к хаосу через перемежаемость с помощью вейвлетного преобразования**

© А.А. Короновский, А.Е. Храмов

Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского,  
ГосУНЦ "Колледж", Саратов  
E-mail: alkor@cas.ssu.runnet.ru

Поступило в Редакцию 19 июня 2000 г.

Основываясь на использовании вейвлетного преобразования, предлагается метод эффективного определения длительности ламинарных и турбулентных фаз во временной реализации при переходе к динамическому хаосу через перемежаемость.

Одним из классических сценариев перехода от периодических колебаний к хаотическим является переход к хаосу через перемежаемость (см., например, [1,2]). В этом случае периодическая временная реализация, порожденная нелинейной динамической системой, с увеличением управляющего параметра начинает прерываться нерегулярными (или, как говорят, турбулентными) движениями. Классическими методами выделения регулярных фаз движения являются методы, основанные на анализе "текущего" периода колебаний или амплитуды колебаний. Очевидно, что первый метод может работать лишь тогда, когда ламинарная фаза представляет сигнал, очень близкий к строго регулярному, что не всегда имеет место. Реально ламинарная фаза представляет собой почти периодическое движение, что затрудняет применение данного метода и снижает его точность. Второй метод может быть применен

только в том случае, когда в хаотической области амплитуда колебаний существенно отличается от амплитуды колебаний в регулярном режиме. В противном случае мы опять сталкиваемся с необходимостью иметь строгую периодичность колебаний в фазе ламинарного движения.

Для точного диагностирования ламинарных и турбулентных фаз и определения их длительностей в настоящей работе предлагается использовать вейвлетное преобразование [3,4]:

$$W(t, s) = \frac{1}{\sqrt{s}} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t') \psi^* \left( \frac{t-t'}{s} \right) dt', \quad (1)$$

где  $x(t)$  — временная реализация,  $\psi(\eta)$  — базисный вейвлет (звездочка обозначает комплексное сопряжение),  $s$  — анализируемый временной масштаб. В качестве базисного вейвлета использовался Морлет-вейвлет [5]  $\psi(\eta) = \pi^{-1/4} e^{j\omega_0 \eta} e^{-\eta^2/2}$ , представляющий собой быстро затухающую гармоническую волну. Здесь  $\omega_0$  было выбрано равным 6, что позволяет проводить аналогию с преобразованием Фурье [3]. С этой целью удобно рассматривать вейвлетную поверхность  $W$ , как функцию времени  $t$  и масштаба  $f_s = 1/s$ , соответствующего частоте.

Оказывается, структура вейвлетной поверхности  $W(t, f_s)$  в области ламинарной и турбулентной фазы движения существенно различна. Причем слабая нерегулярность сигнала в течение ламинарной фазы движения практически не отражается на структуре вейвлетной поверхности и, следовательно, не приводит к ошибке в определении длительности каждой из характерных фаз движения. Поэтому, если тем или иным образом анализировать структуру вейвлетной поверхности, то можно достаточно просто осуществить поиск различных фаз или перемежаемости.

Механизм диагностирования ламинарных и турбулентных фаз иллюстрируется на традиционном примере — системе Лоренца:

$$\dot{x} = \sigma(y - x), \quad \dot{y} = rx - xz - y, \quad \dot{z} = xy - bz. \quad (2)$$

При значениях управляющих параметров  $\sigma = 10$ ,  $b = 8/3$  и при  $r < r^* \cong 166.07$  временная реализация, генерируемая системой Лоренца (например, величина  $x$ , которую мы и будем рассматривать в дальнейшем), представляет собой периодическое движение. При превышении порога  $r^*$  регулярные колебания  $x(t)$  (ламинарная фаза) прерываются

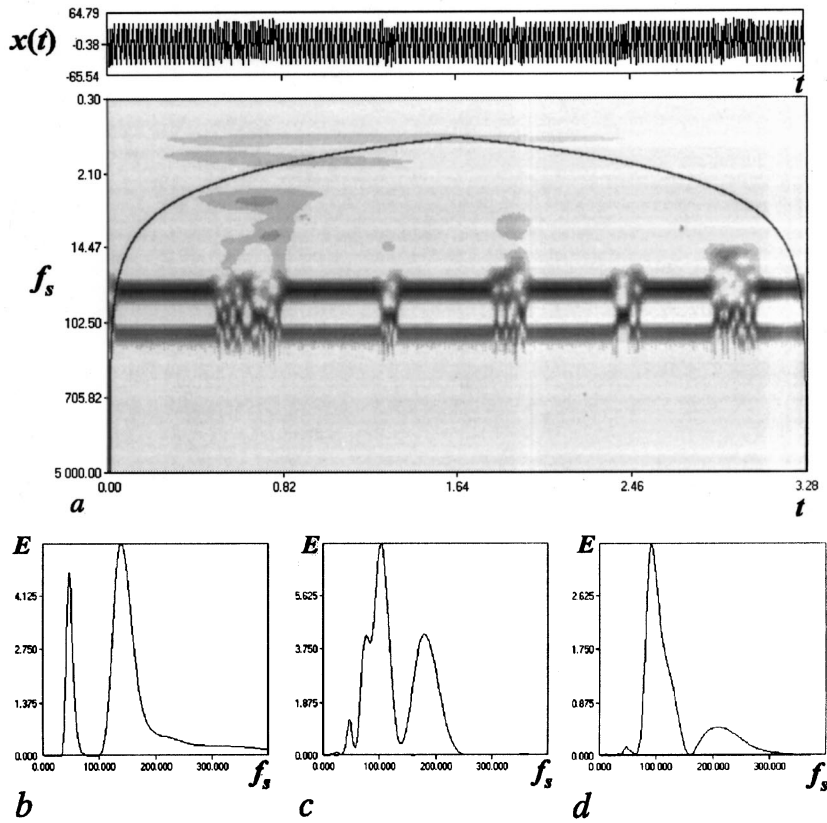
хаотическими всплесками, которые с ростом  $r$  становятся все более и более длительными, пока движение полностью не хаотизируется. Перемежаемость в системе Лоренца классифицируется как перемежаемость I-го типа [6].

На рис. 1, *a* демонстрируется временная реализация  $x(t)$  и соответствующая проекция вейвлетной поверхности  $W(t, f_s)$  при значении бифуркационного параметра  $r = 166.1$ . Наиболее темные участки соответствуют максимумам поверхности. Кривая на рисунке ограничивает области влияния краевых эффектов [3]. На проекции вейвлетной поверхности четко выделяются характерные структуры, соответствующие ламинарной и турбулентной фазам временной реализации.

Структура вейвлетной поверхности, соответствующая регулярной фазе движения, имеет профиль  $W(t, f_s)|_{t=\text{const}}$  с двумя глобальными максимумами (им соответствуют две темные области, расположенные параллельно оси времени, на проекции поверхности  $W$ ), не изменяющийся с течением времени  $t$  в пределах ламинарной фазы. Наличие такой структуры, демонстрирующей два глобальных максимума, связано в первую очередь с особенностями спектра Фурье ламинарной фазы сигнала. В нем присутствуют две преобладающие гармоники с частотами  $f_1 = 41.3$  и  $f_2 = 131.3$ . Именно этим частотам на вейвлетной поверхности соответствуют два максимума.

С входом системы в турбулентную фазу вид поверхности  $W$  сильно изменяется. Можно сказать, что в режиме хаотической динамики наблюдается "всплеск" разномасштабных колебательных явлений, причем основная энергия приходится на масштабы  $f_s$ , соответствующие  $f_s \in (f_1, f_2)$ . Заметим, что области вейвлетной поверхности, соответствующие турбулентным фазам, четко локализованы во времени.

Как уже обсуждалось, для ламинарной фазы структура поверхности не меняется с течением времени. Мгновенное распределение энергии по масштабам  $E(f_s)|_{t=\text{const}}$  в этом случае также не зависит от времени. Его вид приведен на рис. 1, *b*. Распределение имеет характерный вид с двумя глобальными максимумами, природа которых обсуждалась выше (они связаны с наличием преобладающих в спектре Фурье, построенном в течение длительности ламинарной фазы, частот  $f_1$  и  $f_2$ ). Переход к турбулентной фазе начинается с "расщепления" масштабов  $1/f_1$  и  $1/f_2$ . Причем в результате этого наблюдается выделение в энергетическом спектре одного преобладающего масштаба. Далее в течение всей турбулентной фазы наблюдаются возбуждение и подавление колебаний в



**Рис. 1.** *a* — проекция вейвлетной поверхности  $W(t, f_s)$ , полученная по временной реализации  $x(t)$  системы (2) с параметром надкритичности  $r - r^* = 0.03$  ( $r = 166.1$ ). Длительность временной реализации  $N = 2^{15}$  отсчетов. Временные реализации были получены методом Рунге–Кутты 4-го порядка с шагом по времени  $\Delta t = 0.0001$ ; *b, c, d* — мгновенные распределения по энергиям, полученные в результате вейвлетного преобразования, для *b* — ламинарной ( $t = 0.36$ ) и *c, d* — турбулентной (соответственно  $t = 0.56$ ,  $t = 0.72$ ) фаз движения; *e* — проекция вейвлетной поверхности, полученная по временной реализации  $x(t)$  системы Лоренца с параметром надкритичности  $r - r^* = 0.93$  ( $r = 167.0$ ). Черными прямоугольниками выделены ламинарные фазы движения.

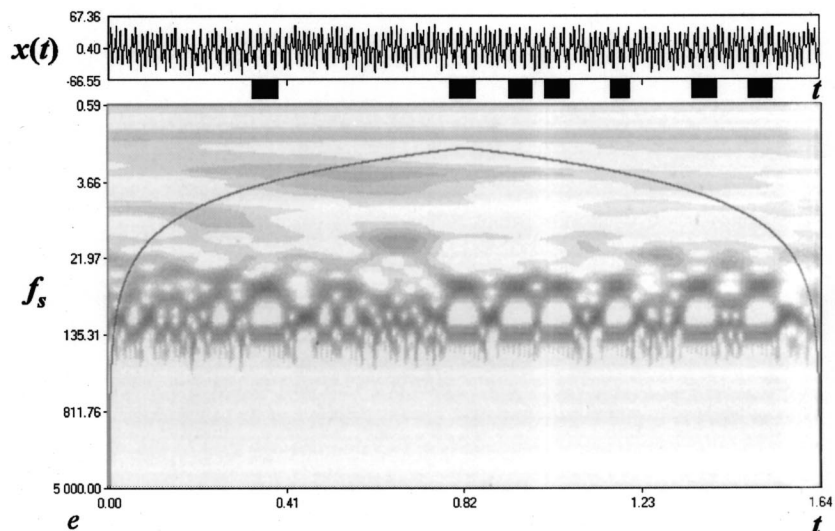


Рис. 1 (продолжение).

системе на различных временных масштабах, преимущественно меньших, чем  $1/f_1$ . Распределение по энергиям существенно нестационарно в течение турбулентной фазы. Единственной его особенностью, наблюдающейся в течение всего хаотического "всплеска", является наличие преобладающего масштаба  $1/f_s \sim 0.011$  (знак " $\sim$ " поставлен ввиду того, что расположение максимума меняется и величина 0.011 является усредненной по длительности нескольких турбулентных фаз). Вид же распределения по энергиям сильно меняется с течением времени. Для иллюстрации на рис. 1, *c, d* представлены мгновенные распределения энергии по масштабам  $E(f_s)$  соответственно для моментов времени  $t = 0.56$  и  $t = 0.72$ . Хорошо видно, что они существенно различаются как числом максимумов, так и их расположением.

С ростом бифуркационного параметра длительность ламинарных фаз уменьшается, и при  $r > 167.0$  ламинарные фазы практически исчезают из временной реализации. Вместе с тем вейвлетный анализ успешно выделяет ламинарные фазы с длительностью порядка  $2 \div 3$  периодов колебаний на основной частоте в спектре. Это иллюстрирует рис. 1, *e*,

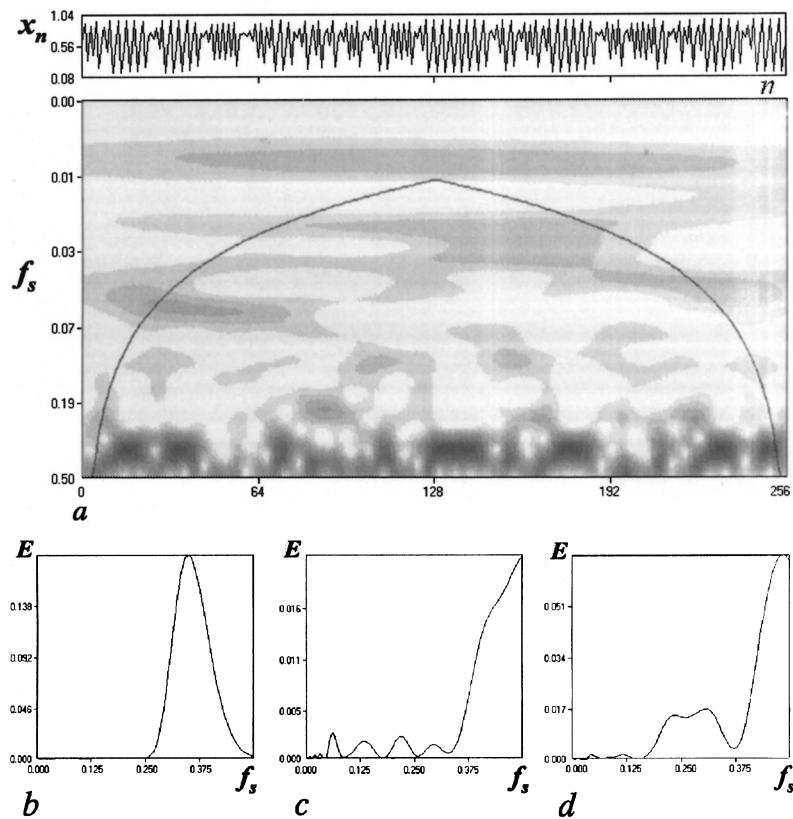
на котором представлены результаты вейвлетного преобразования для значения управляющего параметра  $r = 167.0$ . Отчетливо видно, что в моменты ламинарных фаз появляются характерные структуры на вейвлет-поверхности  $W(t, f_s)$ .

Аналогичная ситуация наблюдается не только при анализе временных реализаций, порождаемых потоковыми системами. Для иллюстрации этого на рис. 2, *a* приведены результаты вейвлетного анализа временной реализации, порожденной логистическим отображением  $x_{n+1} = \varepsilon x_n(1-x_n)$  при значении управляющего параметра  $\varepsilon^* - \varepsilon = 0.002$ , где  $\varepsilon^* = 1 + \sqrt{8}$  — критическое значение, при котором происходит касательная бифуркация регулярного цикла периода 3 (устойчивый и неустойчивые 3-циклы сливаются и исчезают), а ниже по параметру ламинарные фазы прерываются турбулентными.

Из анализа вейвлетной поверхности и ее сопоставления с временной реализацией видно, что ламинарным фазам движения соответствуют также особая одинаковая структура поверхности. Выход из области ламинарной фазы движения, как и в случае динамики системы Лоренца, сопровождается исчезновением временного масштаба, соответствующего регулярным колебаниям системы. Также существенно различаются характерные распределения энергии колебаний по временным масштабам в режиме хаоса и ламинарной фазы. В последнем случае распределение  $E(f_s)$  не меняется и имеет вид, приведенный на рис. 2, *b*. В турбулентной фазе движения распределение по энергиям зависит от времени (рис. 2, *c, d*, на которых представлены зависимости  $E(f_s)$  для двух различных моментов времени).

Результаты вейвлетного анализа, представленные для модели Лоренца, имеют достаточно универсальный характер в плане рассмотрения сценария перехода к хаосу через перемежаемость. Таким образом, возможно использование вейвлетного преобразования временных реализаций динамических систем, демонстрирующих переход к хаосу через перемежаемость, для выделения и анализа ламинарных (и турбулентных) фаз.

Для анализа структуры вейвлетной поверхности может быть предложена методика, основанная на определении числа максимумов  $F$  на мгновенных распределениях энергии по масштабам колебаний  $E(f_s)|_{t=\text{const}}$ . В течение ламинарной фазы число максимумов постоянно, при переходе к турбулентной фазе величина  $F$  начинает сильно зависеть от времени. Такая методика эффективно позволяет выделить ламинар-



**Рис. 2.** *a* — проекция поверхности  $W(n, f_s)$ , полученная по реализации  $x_n$  логистического отображения с параметром  $\varepsilon = 1 + \sqrt{8} - 0.002$ . Длительность временной реализации  $N = 256$  отсчетов. Мгновенные распределения по энергиям, полученные в результате вейвлетного преобразования: *b* — для ламинарной ( $n = 136$ ) и *c, d* — для турбулентной (соответственно  $n = 62, n = 220$ ) фазы движения в логистическом отображении. *e* — средняя длительность ламинарной (1) и турбулентной (2) фаз колебаний  $x(t)$  в модели Лоренца вблизи порога перемежаемости в зависимости от параметра надкритичности  $r$ ; *f* — средняя длительность ламинарной фазы движений вблизи порога перемежаемости, построенная в двойном логарифмическом масштабе. Точки — результаты работы процедуры выделения ламинарных фаз с помощью вейвлетного преобразования. Пунктирная линия — степенная функция от величины  $r - r^*$  с показателем "1/2".

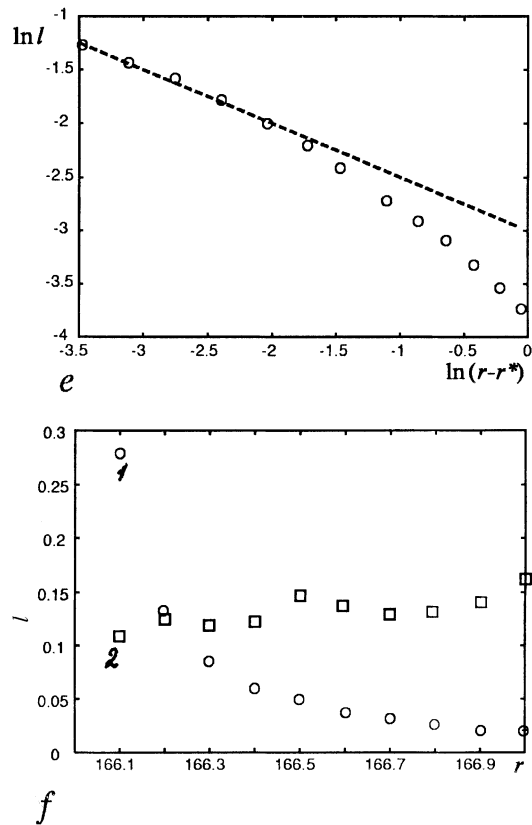


Рис. 2 (продолжение).

ные фазы движения. Учитывая, что величина  $F$  принимает только целые значения, определить, например, длительность ламинарной фазы движения по зависимости  $F(t)$  не представляет сложности. Данная методика успешно работает и при увеличении параметра надкритичности.

Для иллюстрации данного метода были определены средние длительности  $l$  ламинарных и турбулентных фаз движения в зависимости от параметра надкритичности  $r$ . Число ламинарных (а соответственно и



турбулентных) фаз, по которым определялись данные характеристики, составляло порядка  $600 \div 800$  характерных фаз. На рис. 2, *e* представлены результаты расчета. Средняя длительность ламинарной фазы движения уменьшается с ростом  $r$ , а средняя длительность хаотической фазы меняется существенно слабее, хотя и имеет тенденцию к увеличению с ростом значения параметра надкритичности. Последнее вполне объяснимо, так как хаотическая фаза движения есть не что иное, как стадия реламинаризации, т.е. возвращение к регулярному движению. Понятно, что длительность реламинаризации не зависит от параметра надкритичности  $r$ . На рис. 2, *f* показана зависимость  $\ln l$  от величины  $\ln(r - r^*)$ . Благодаря логарифмическому масштабу можно легко убедиться, что уменьшение длительности ламинарной фазы происходит пропорционально квадратному корню из расстояния  $(r - r^*)$  от порога перемежаемости (по крайней мере при небольших значениях величины  $(r - r^*)$ ), что и предсказывает теория перемежаемости I-го рода [6]. При больших величинах надкритичности наблюдается отклонение роста длительности ламинарной фазы от степенного закона. Таким образом, предложенный метод дает результаты, хорошо известные в литературе [2,6].

Работа поддержана грантами РФФИ 99-02-16016 и 98-02-16541.

## Список литературы

- [1] *Manneville P., Pomeau Y.* // *Physica D.* 1980. V. 1D. P. 219.
- [2] *Pomeau Y., Manneville P.* // *Comm. Math. Phys.* 1980. V. 75. P. 189.
- [3] *Torrence C., Compo G.P.* // *Bulletin of the American Meteorological Society.* 1998. V. 79. P. 61.
- [4] *Wavelets* / Ed. J.M. Combes, A. Grossman, T. Tchamitchian. Berlin: Springer-Verlag, 1989.
- [5] *Grossman A., Morlet J.* // *SIAM J. Math. Anal.* 1984. V. 15. P. 723.
- [6] *Шустер Г.* Детерминированный хаос. М.: Мир, 1988.