

Введение

Вейвлетный анализ, возникший сравнительно недавно, как оказалось, является мощным средством анализа динамики систем и привлекает в последнее время все большее внимание исследователей. Отражением этого факта служит большое число работ, ориентированных на начинающего исследователя, посвященных изложению основных понятий и сущности вейвлетного преобразования. Среди подобных работ читателю можно порекомендовать обзорные работы Н.М. Астафьевой [1, 2], статью, написанную Торренсом и Компо [3], вводные и обзорные курсы, сборники статей по вейвлетному анализу [4]–[27], а также многочисленные другие публикации по данной тематике (см. библиографию к приведенным работам). Тем не менее, мы не смогли удержаться, чтобы не пополнить этот ряд (приведенный выше в очень “усеченном” виде) еще одной книгой. В этой книге мы старались, опираясь на хорошо известные физические представления и примеры, объяснить механизм работы вейвлетного преобразования и возможности его применения для анализа сложных режимов, порожденных нелинейными динамическими системами. Вопросы приложениия вейвлетного анализа к исследованию динамического хаоса и турбулентности вызывают в настоящее время большой интерес и привлекают внимание исследователей [28]–[31].

Следует сразу оговориться, что в книге, в полном соответствии с ее названием, рассматривается только непрерыв-

ный вейвлетный анализ. Наряду с непрерывным вейвлетным анализом существует дискретное вейвлетное преобразование (см. работы [5], [32]–[39]), на котором мы не останавливаемся.

Начнем наше рассмотрение с хорошо известного читателю спектрального анализа, отталкиваясь от него, как от основы, являющейся, в какой-то мере, предшественником и базой вейвлетного анализа. Первым вопросом, на котором следует остановиться, является основной вопрос: “А для чего нужен вейвлетный анализ?”. Существует ведь хорошо себя зарекомендовавший, эффективный и привычный аппарат спектрального анализа [41], использующий ряды и/или интегралы Фурье. В то же самое время, реализация вейвлетного анализа несколько более сложна, чем реализация преобразования Фурье. Тем не менее, оказывается, что привычный спектральный анализ не всегда помогает понять, как устроен анализируемый сигнал.

Рассмотрим в качестве простого примера сигнал, являющийся суммой двух гармонических сигналов с разными частотами

$$f(t) = \cos(\omega_1 t) + \cos(\omega_2 t). \quad (1)$$

В этом случае, в фурье-спектре будут присутствовать два пика (рис. 1) на частотах ω_1 и ω_2 .² Когда обе частоты присутствуют в сигнале постоянно, спектральный подход четко выделяет существующие в сигнале частоты, предоставляя исследователю полную информацию об “устройстве” исследуемого сигнала. Если же частоты в сигнале появляются или исчезают с течением времени, спектральный анализ (см. рис. 2, на котором представлен случай сигнала, в котором гармонический процесс с одной частотой ω_1 сменяется

² Следует отметить, что в дальнейшем рассматривается диапазон положительных значений частот — отрицательный диапазон, по сути дела, является зеркальным отражением положительного и не несет никакой дополнительной смысловой нагрузки.

в некоторый момент времени процессом с другой частотой ω_2) не дает полной информации

$$f(t) = (1 - H(t)) \cos(\omega_1 t) + H(t) \cos(\omega_2 t), \quad (2)$$

где $H(t)$ – функция Хевисайда. Глядя на спектр сигнала, ничего нельзя сказать о том, какие частоты присутствовали в сигнале в тот или иной момент времени.

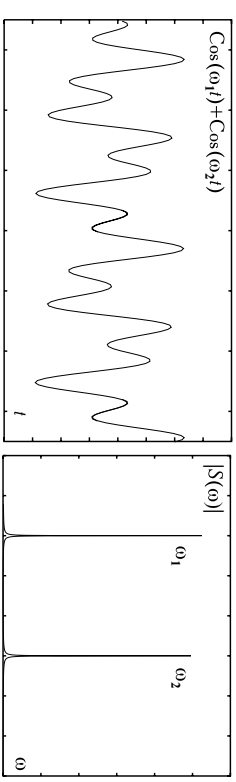


Рис. 1: Сигнал, представляющий собой суперпозицию двух двух гармонических сигналов с частотами $\omega_2 = 2.5\omega_1$ и его спектр. Шкала неогарифмическая

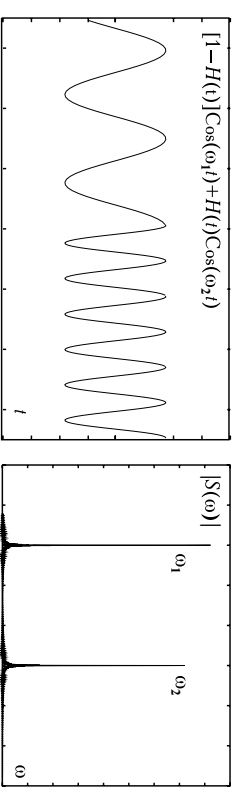


Рис. 2: Гармонический сигнал, у которого резко изменяется частота с величинами ω_1 на $\omega_2 = 2.5\omega_1$ и его спектр (шкала неогарифмическая). По виду спектра нельзя отличить данный случай от предыдущего, когда рассматриваемый сигнал представлял собой сумму двух гармонических сигналов (см. рис. 1)

Из вида спектра совершенно неясно, был ли исследуемый сигнал суммой двух гармонических сигналов (как в первом случае, см. рис. 1), или же в сигнале частоты существовали отдельно в разные моменты времени (рис. 2). Информацию

об этом из вида спектрального представления сигнала по-лучить невозможно.

Из рассмотренного простого примера следует, что спектральный анализ, позволяющий выделить присутствующие в сигнале гармоники, является эффективным средством анализа временных реализаций, частотный состав которых не изменяется с течением времени. В тех же случаях, когда не изменяется с течением времени (или частота плавно изменяется с течением времени (рис. 3), необходима иной (хотя, может быть, в чем-то похожий на спектральный) метод анализа.

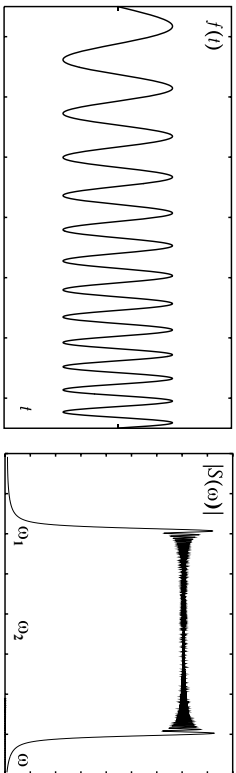


Рис. 3: Сигнал, частота которого линейно возрастает с течением времени: $\omega = \omega_1 + a(\omega_2 - \omega_1)t$ и его спектр. Глядя на сплошной спектр, можно предположить, что в сигнале присутствуют все частоты, попадающие в диапазон $[\omega_1; 2\omega_2 - \omega_1]$. Шкала нелогарифмическая

Невозможность отследить появление (исчезновение) или изменение частотных составляющих сигнала кроется в самом механизме спектрального анализа, а именно: при преобразовании Фурье

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt \quad (3)$$

интегрирование проводится по всей длине временной реализации (от $-\infty$ до $+\infty$) и каждая гармоника, присутствующая

щая во временной реализации в тот или иной интервал времени, наглядывает свой “отпечаток” на общий вид спектра. Следовательно, если возникает задача определить, как менялся частотный состав сигнала с течением времени, необходимо отказаться от интегрирования по всему временному интервалу $(-\infty, +\infty)$ и рассматривать некоторый диапазон длительностью $2T$ [$t_0 - T; t_0 + T$], где t_0 — интересующий нас момент времени, в который мы хотим локально определить частотные составляющие, присутствующие в сигнале:

$$S(\omega, t_0) = \int_{t_0-T}^{t_0+T} f(t)e^{-j\omega t} dt. \quad (4)$$

Для того, чтобы составить представление о всем сигнале, необходимо сдвинуть “окно”, длительностью $2T$, вдоль временной реализации. В этом случае, в зависимости от выбора t_0 , получается “свой” спектр, изменяющийся по мере того, как “окно” фурье-преобразования перемещается вдоль реализации (рис. 4). Фактически, t_0 является переменной величиной, и возникает необходимость рассматривать поверхность $S(\omega, t_0)$.

Однако, подобный подход, называемый оконным преобразованием Фурье, тоже не очень хорош (см. например, работу [21]). Все дело в том, что при преобразовании Фурье гармонического сигнала спектр имеет вид δ -функции только в том случае, если этот сигнал постоянной частоты имеет бесконечную длительность (т.е. начинается в момент времени $t = -\infty$ и заканчивается в $t = +\infty$), и интегрирование проводится по этому же бесконечному интервалу времени. В случае, если же сигнал имеет конечную длительность, (или, что почти то же самое, интегрирование ведется по конечному интервалу времени), его спектральный образ имеет конечную ширину, и чем меньше длительность сигнала, тем большую ширину в пространстве частот имеет его фурье-образ. Таким образом,

при применении оконного преобразования Фурье: с одной стороны, необходимо выбрать ширину окна $2T$ как можно меньше, чтобы четко выявить момент времени, появления или исчезновения той или иной частотной составляющей сигнала; с другой стороны, при этом падает разрешение метода в частотном диапазоне. Иначе говоря,

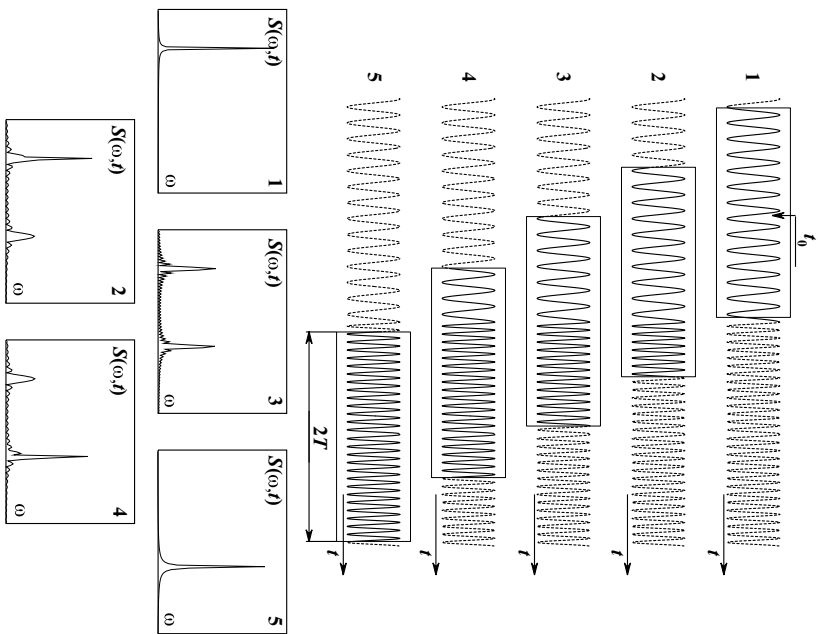


Рис. 4: Оконное преобразование Фурье временного сигнала (2), представляющего собой два последовательных участка гармонических сигналов с разными частотами ω_1 и ω_2 . Окно преобразования сдвигается вдоль временной реализации, что приводит к трансформации спектра (нижняя часть рисунка). Шкала неогарфимическая

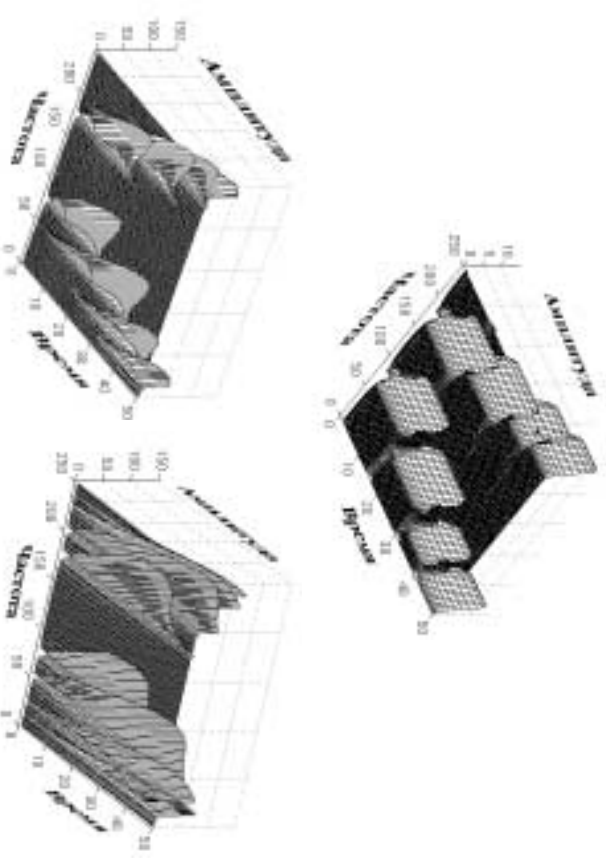


Рис. 5: Сигналы, представляющий из себя "набор" четырех синусоид, существовавших в различные интервалы времени (в интервал времени от 0 до 250 миллисекунд частота синусоидального сигнала составляла $f = 300$ Гц, затем от 250 до 500 миллисекунд — $f = 200$ Гц, от 500 до 750 миллисекунд — $f = 100$ Гц и от 750 до 1000 миллисекунд — $f = 50$ Гц) был подвергнут оконному преобразованию Фурье. Различные рисунки соответствуют различной ширине окна. Отчетливо видно, что чем лучше локализована частота сигнала, тем менее четко удается выделить момент времени, когда эта частотная составляющая появилась в сигнале, и наоборот (из работы [20])

более или менее точно определяя момент появления какой-либо частоты, мы, в то же самое время, ничего не можем сказать о значении этой частотной компоненты: возникла ли эта частотная составляющая одна, или же одновременно возникло несколько составляющих, близких по частотам. Попытка же улучшить разрешение метода в частотном диапазоне приводит к ухудшению временного разрешения

— идеальным случаем, с точки зрения выявления частот, является само преобразование Фурье (3), но, как мы уже видели, с точки зрения анализа временной динамики частотных составляющих, оно является малоэффективным.

Рис. 5 иллюстрирует сказанное. Анализируемый сигнал представляется из себя четыре синусоидальных сигнала с разными частотами, последовательно сменяющими друг друга. На рисунках a , b и $в$ показана поверхность $S(\omega, t)$ для различной ширины окна $2T$. Отчетливо видно, что не удаётся одновременно четко определить характер сигнала и в частотном, и во временном диапазонах. Следовательно, оконное преобразование Фурье, при всей его оригинальности, является не слишком эффективным средством для анализа сигналов, частотные составляющие которых меняются с течением времени.

Таким образом, необходимо как-то модифицировать оконное преобразование Фурье (4), чтобы осталась возможность отслеживать изменения, происходящие во времени, но, по-возможности, уменьшить недостатки, связанные с неточностью определения частот. Безусловно, читатель понимает, что такое определение частот лучше справляется с поставленными задачами, нежели оконное преобразование Фурье. Тем не менее, мы позволим себе еще на некоторое время отодвинуть момент, когда появится формальное определение вейвлетного преобразования, и постараемся “главно” подвести к нему читателя. Подумаем немного над тем, как можно было бы, используя оконное преобразование Фурье (4), получить более или менее полную информацию о динамике частотных составляющих в исследуемом сигнале.

Обратим внимание на то, что хотя оконное преобразование Фурье, выполненное один раз, не даёт полной информации о сигнале, совокупность подобных преобразований

одного и того же сигнала, выполненных с различной шириной окна $2T$, оказывается гораздо более информативной (см. рис. 5а–б). Можно использовать результаты оконного преобразования с малой шириной окна для определения моментов времени, когда происходит изменения спектрального состава сигнала, а преобразование с большой шириной окна — для выделения соответствующих спектральных компонент. Другое дело, что подобных подходов оказывается неудобным. Фактически, у нас возникает необходимость расмагнривать функцию не двух переменных $S(\omega, t_0)$ (4), а трех — $S(\omega, t_0, T)$, которая требует представления в четырехмерном пространстве, что ведет к вполне понятным сложностям.

Для уменьшения числа переменных, можно “связать” каким-либо образом частоту ω с длительностью “окна” T , например, для каждого временного масштаба T положить $\omega = 2\pi n/T$ ($n \in \mathbb{R}$). Тогда преобразование Фурье (4) будет иметь вид

$$S(T, t_0) = \int_{t_0-T}^{t_0+T} f(t) \exp \left\{ -j \frac{2\pi n}{T} t \right\} dt. \quad (5)$$

Фактически, в трехмерном пространстве (ω, t_0, T) , на котором определена функция $S(\omega, t_0, T)$, выделяется некоторая поверхность σ , в точках которой и расмагнривается вышеописанная функция S . Понятно, что часть информации в этом случае теряется, но “оставшейся части” вполне достаточно, чтобы составить представление об особенностях расмагнриваемой временной реализации $f(t)$, поскольку введенная в рассмотрение поверхность σ “охватывает” как весь частотный, так и временной диапазоны (рис. 6).

Более того, размер окна, которое должно “выделять” различные гармоники, оказывается “завязан” на соответствующий временной масштаб — понятно, что для выявления низкочастотных гармоник необходимо проанализиро-

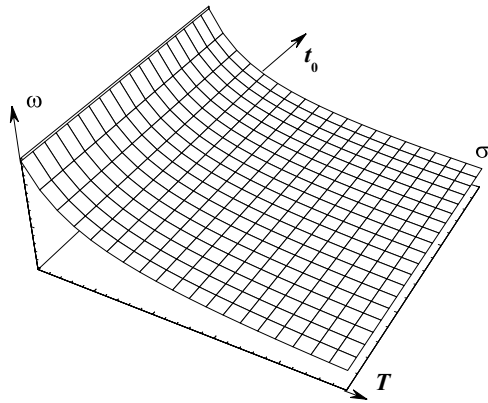


Рис. 6: Поверхность σ , определенная в трехмерном пространстве “частота–время–ширина окна”

вать больший отрезок временной реализации по сравнению с тем случаем, когда анализируются высокочастотные гармоники. Соотношение $\omega = 2\pi n/T$ как раз и обеспечивает разумное соотношение анализируемой частоты ω и ширины анализирующего окна T .

Рассмотрим результат преобразования (5) для временной реализации $f(t) = \sin(\omega t)$. В этом случае несложные, но достаточно громоздкие выкладки дают

$$S(T, t_0) = \frac{2T \sin(\omega T)}{\omega^2 T^2 - 4\pi^2 n^2} [\omega T \sin(\omega t_0) - j2\pi n \cos(\omega t_0)] \exp \left[-j2\pi n \frac{t_0}{T} \right]. \quad (6)$$

Точно также, как и при спектральном анализе, результат преобразования имеет как действительную, так и мнимую части. По аналогии с преобразованием Фурье, имеет смысл рассматривать квадрат модуля величины S :

$$|S(T, t_0)|^2 = \frac{4T^2 \sin^2(\omega T)}{(\omega^2 T^2 - 4\pi^2 n^2)^2} [\omega^2 T^2 \sin^2(\omega t_0) +$$

$$+4\pi^2 n^2 \cos^2(\omega t_0)]. \quad (7)$$

Можно убедиться, что в рассматриваемом случае величина $|S(T, t_0)|^2$ принимает максимальное значение при $T \rightarrow 2\pi n/\omega$, равное n^2/ω^2 (рис. 7). Таким образом, в рассматриваемом случае, аналогично Фурье-анализу, происходит выделение временного масштаба T , соответствующего частоте сигнала.

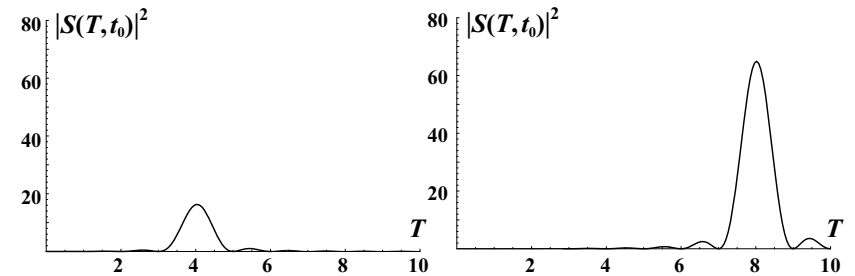


Рис. 7: Результат преобразования (5) для одной и той же временной реализации $f(t) = \sin(\omega t)$, $\omega = \pi$, $t_0 = 0$. В случае (а) $n = 2$, (б) $n = 4$

Здесь следует обратить внимание на несколько важных моментов.

Во-первых, для одного и того же сигнала $f(t) = \sin(\omega t)$ при разных значениях параметра n (характеризующего число полных периодов анализирующей синусоиды, “укладывающихся” в окне шириной T), значение ширины окна, при котором величина $|S(T, t_0)|^2$ является максимальной, оказывается различной (см. рис. 7а, б). Этот факт становится вполне понятным, если обратить внимание на то, что величина $|S(T, t_0)|^2$ является максимальной для такой ширины окна, при которой гармоническое заполнение этого окна имеет ту же самую частоту ω , что и анализируемый сигнал $f(t)$ (рис. 8). Иными словами, величина $|S(T, t_0)|^2$ максимальна, когда $T = 2\pi n/\omega$, где ω — частота анализируемого сигнала $f(t)$. Фактически, то же самое происходит и при спектральном анализе, однако значение переменной,

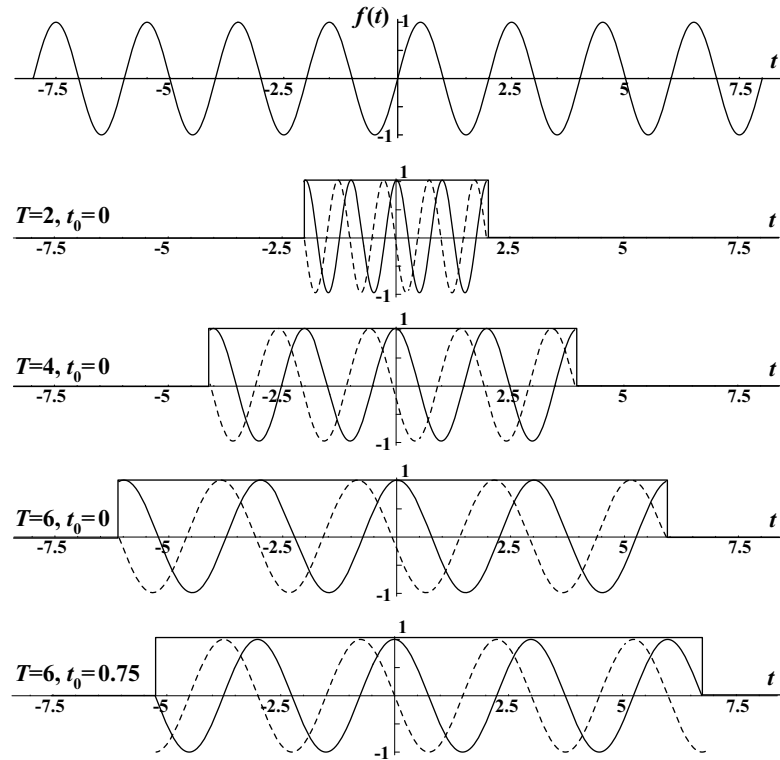


Рис. 8: (а) Временная реализация $f(t) = \sin(\omega t)$, $\omega = \pi$ и несколько окон интегрирования (σ - ∂) различной ширины $2T$ с анализирующим заполнением $\exp(-j2\pi n/T)$. Действительная часть заполнения показана сплошной линией, мнимая — пунктирной. Максимальное значение (сравните с рис. 7а) $|S(T, t_0)|^2$ достигается при $T = 4$ (случай (в)), когда частота заполнения $\exp(-j2\pi n/T)$ совпадает с частотой сигнала $f(t)$. Рисунки (з) и (д) иллюстрируют сдвиг окна интегрирования шириной $2T$ на величину, определяемую второй переменной t_0

при котором исследуемая функция имеет максимум, зависит от того, каким образом “устроено” анализирующее окно, и не всегда совпадает с соответствующим временным масштабом, присутствующим в сигнале. Следует также заметить, что чем большее число периодов укладывается в окне интегрирования (чем больше величина n), тем отчетливее выражено наличие данной гармоники в $|S(T, t_0)|^2$ (ср. рис. 7а и 7б). Однако, как следствие этого, ширина окна, при котором $|S(T, t_0)|^2$ принимает максимальное значение, также увеличивается (см., опять-таки, рис. 7а, б), что, как было указано выше, ведет к ухудшению разрешающих свойств преобразования во временном диапазоне (в то время как разрешение в частотном диапазоне улучшается).

В-третьих, следует помнить, что получающаяся в результате преобразования (5) величина $S(T, t_0)$ является функцией двух переменных — T и t_0 . Величина T определяет временной диапазон, по которому осуществляется интегрирование в формуле (5) и одновременно частоту анализирующего заполнения. Таким образом, частота анализирующего заполнения оказывается жестко связана с шириной окна T . В то же время переменная t_0 определяет момент времени, в который осуществляется описание взятое преобразование; фактически, t_0 определяет сдвиг окна интегрирования вдоль оси времени. Но когда окно интегрирования сдвигается, анализирующее гармоническое заполнение “остаётся на месте” (см. рис. 8а, б), иными словами, фаза заполнения все время непрерывно изменяется по мере сдвига окна вдоль оси времени. Оказывается удобным зафиксировать фазу заполнения относительно анализирующего окна, для чего следует модифицировать соотношение (5):

$$S(T, t_0) = \int_{t_0-T}^{t_0+T} f(t) \exp \left\{ -j \frac{2\pi n}{T} (t - t_0) \right\} dt. \quad (8)$$

Изменение фазы заполнения не оказывает влияния на величину $|S(T, t_0)|^2$, поскольку влияет только на аргумент комплексной функции $S(T, t_0)$. Для гармонического сигнала $f(t) = \sin(\omega t)$ соотношение (8) дает

$$S(T, t_0) = \frac{2T \sin(\omega T)}{\omega^2 T^2 - 4\pi^2 n^2} [\omega T \sin(\omega t_0) - j2\pi n \cos(\omega t_0)]. \quad (9)$$

Нетрудно видеть, что все различие между соотношениями (6) и (9) состоит лишь в множителе $\exp(-j2\pi n t_0/T)$.

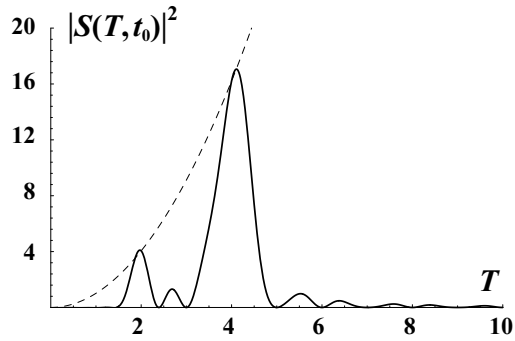


Рис. 9: Преобразование (8) для сигнала $f(t) = \sin(\omega_1 t) + \sin(\omega_2 t)$, $\omega_1 = \pi$, $\omega_2 = 2\pi$. Пунктирной линией нанесена парабола T^2 , характеризующая положение максимумов гармоник соответствующих частот и единичной амплитуды

В-третьих, необходимо обратить внимание на тот факт, что две гармоники исходного сигнала с различными частотами, но с одинаковой амплитудой, выделяются преобразованием (8) в виде двух максимумов различной высоты (рис. 9). Квадраты этих максимумов S_1 и S_2 соотносятся как

$$\frac{S_1^2}{S_2^2} = \left(\frac{\omega_2}{\omega_1} \right)^2, \quad (10)$$

что следует из формулы (7). Иными словами, чем больше частота гармоника, тем менее она заметна по сравнению с гармониками меньших частот. Из вышеказанного следует, что если в анализируемом сигнале присутствуют две гармоники с сильно различающимися частотами, то гармонику с большей частотой при анализе с помощью соотношения (8) можно просто не заметить, если не предпринять соответствующих мер.

Фактически преобразование (8) уже является вейвлетным преобразованием (с некоторыми поправками), к которому был осуществлен “главный” переход от спектрального анализа. Заметим, что выражение (8) можно переписать в виде

$$S(T, t_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \psi^* \left(\frac{t - t_0}{T} \right) dt, \quad (11)$$

где $\psi(\xi)$ — анализирующая функция (рис. 10)

$$\psi(\xi) = [\sigma(\xi + 1) - \sigma(\xi - 1)] e^{j2\pi\xi} \quad (12)$$

и содержащая в себе все вышеописанные свойства (звездочка здесь и далее обозначает комплексное сопряжение).

Преобразование (11) осуществляется растяжением и сдвигом функции $\psi(\xi)$ так, как это было описано выше и показано на рис. 8. В этом случае величина T описывает растяжение, а t_0 — сдвиг анализирующей функции. Функция (12) является, с точностью до нормировочного коэффициента, “материнским” или “базовым” вейвлетом (“mother wavelet”), из которого получают все остальные вейвлеты других масштабов $\psi((t - t_0)/T)$ путем сдвига и

растяжения. Для удобства на материнский вейвлет накладываются условие единичной нормы в пространстве $L^2(\mathbb{R})$, т.е. требуют, чтобы

$$\|\psi\|_{L^2} = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(\xi)\psi^*(\xi)d\xi \right)^{1/2} = 1. \quad (13)$$

С учетом соотношения (13) рассматриваемый “материнский вейвлет” (будем обозначать его как ψ_0) имеет вид

$$\psi_0(\xi) = \frac{\sigma(\xi+1) - \sigma(\xi-1)}{\sqrt{2}} e^{j2\pi\xi}. \quad (14)$$

Нетрудно видеть, что вейвлетные функции для других масштабов $\psi_0((t-t_0)/T)$, полученные “растяжением” и сдвигом материнского вейвлета ψ_0 , не удовлетворяют соотношению (13). Для того, чтобы оно выполнялось, необходимо на соответствующем временном масштабе T ввести корректирующий коэффициент, зависящий от этого масштаба. Тогда и в преобразовании (11) следует использовать не просто “растянутую” и “сдвинутую” функцию $\psi_0((t-t_0)/T)$, а с учетом масштабирующего коэффициента $T^{-1/2}$

$$\psi_{T,t_0}(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} \psi_0\left(\frac{t-t_0}{T}\right). \quad (15)$$

Тогда преобразование (11) примет вид

$$S(T, t_0) = \frac{1}{\sqrt{T}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\psi^*\left(\frac{t-t_0}{T}\right) dt. \quad (16)$$

Это соотношение и есть настоящее непрерывное вейвлетное преобразование, такое, как оно вводится в литературе (см., например, [1]–[3]). Единственное, что еще следует отметить, это обозначения. Поскольку изначально оправданной точкой

было преобразование Фурье, то и вейвлетное преобразование, полученное с помощью плавного перехода и качественных рассуждений, также содержит те же самые обозначения. Но для вейвлетного преобразования традиционно принято обозначать временной масштаб через s (то есть $T \equiv s$), а само преобразование через $W(s, t_0)$ (хотя, справедливости ради, следует отметить, что встречаются и другие обозначения):

$$W(s, t_0) = \frac{1}{\sqrt{s}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \psi^* \left(\frac{t - t_0}{s} \right) dt. \quad (17)$$

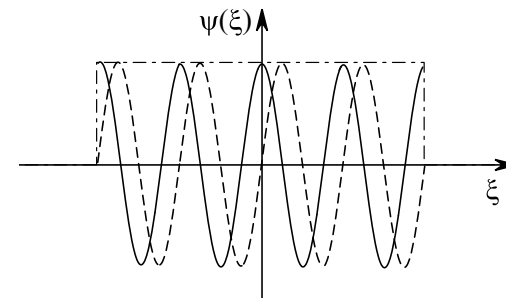


Рис. 10: Sin-вейвлет

Таким образом, нам удалось осуществить плавный переход от преобразования Фурье к вейвлетному преобразованию, так, чтобы было понятна суть и основная идея последнего. Фактически, при вейвлетном преобразовании происходит разложение по другому функциональному базису, нежели функции \sin и \cos , как это имеет место при фурье-преобразовании. В качестве базисных функций выступают вейвлеты ψ_{s,t_0} , получающиеся растяжением и сдвигом материнского вейвлета ψ_0 . Материнский вейвлет (14), полученный плавным переходом от фурье-преобразования, показан на рис. 10. Будем называть эту вейвлетную функцию Sin-вейвлетом. Этот вейвлет не имеет широкого применения на

практике, мы ввели его исключительно из методологических соображений. Однако важной отличительной чертой вейвлетного преобразования является тот факт, что в качестве материнского вейвлета может быть выбран *любая* функция, удовлетворяющая определенным условиям, о которых речь пойдет ниже.