

*На правах рукописи*

КУРОВСКАЯ Мария Константиновна

ОСОБЕННОСТИ ПОВЕДЕНИЯ НЕКОТОРЫХ  
НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ ВБЛИЗИ ГРАНИЦЫ РЕЖИМА  
ХАОТИЧЕСКОЙ ФАЗОВОЙ СИНХРОНИЗАЦИИ  
(РАЗРУШЕНИЕ/УСТАНОВЛЕНИЕ СИНХРОННОГО  
РЕЖИМА, ПЕРЕМЕЖАЕМОСТЬ)

01.04.03 – Радиофизика

А в т о р е ф е р а т  
диссертации на соискание учёной степени  
кандидата физико–математических наук

Саратов – 2009

Работа выполнена на кафедре электроники, колебаний и волн и кафедре нелинейной физики ГОУ ВПО “Саратовский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского”.

Научный руководитель: доктор физико–математических наук, доцент  
**Короновский Алексей Александрович**

Официальные оппоненты: доктор физико–математических наук  
**Казанцев Виктор Борисович**

кандидат физико–математических наук, доцент  
**Павлов Алексей Николаевич,**

Ведущая организация: Саратовский государственный  
технический университет, г. Саратов

Защита состоится “14” мая 2009 г. в 15 часов 30 минут в 34 ауд. III корпуса СГУ на заседании диссертационного совета Д 212.243.01 в Саратовском государственном университете (410012, г. Саратов, ул. Астраханская, 83).

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке Саратовского государственного университета (Саратов, ул. Университетская, 42).

Автореферат разослан “26” марта 2009 г.

Ученый секретарь диссертационного совета



В.М. Аникин

## ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

**Актуальность исследуемой проблемы.** Явление хаотической синхронизации, и в частности, фазовой синхронизации, наблюдаемое в системах различной природы, включая химические, биологические и физиологические, активно изучается в последнее время и вызывает большой интерес исследователей. Различные аспекты синхронизации автоколебательных систем рассмотрены в работах В.С. Анищенко, В.В. Астахова, В.С. Афраймовича, Б.П. Безручко, В.Н. Белых, Т.Е. Вадивасовой, А.С. Дмитриева, В.Б. Казанцева, А.А. Короновского, С.П. Кузнецова, П.С. Ланда, В. Линдсея, В.В. Матросова, В.И. Некоркина, Г.В. Осипова, А.Н. Павлова, А.И. Панаса, В.И. Пономаренко, В.П. Пономаренко, Д.Э. Постнова, М.Д. Прохорова, М.И. Рабиновича, Н.Ф. Рулькова, Д.И. Трубецкова, А.Е. Храмова, В.Д. Шалфеева, H.D. Abarbanel, S. Boccaletti, T.L. Carroll, L.O. Chua, P. Grassberger, L. Kocarev, J. Kurths, R. Meucci, U. Parlitz, L.M. Pecora, A.S. Pikovsky, K. Pyragas, M.G. Rosenblum, C.T. Zhou и многих других. Колоссальное число систем, как модельных, являющихся эталонными, так и представляющих практический интерес с той или иной точки зрения, было изучено и описано с позиций фазовой синхронизации<sup>1</sup>. В то же самое время следует отметить, что внимание исследователей, в подавляющем большинстве случаев, уделяется установлению факта существования или отсутствия синхронной динамики, в то время как процессы, происходящие вблизи границы возникновения режима фазовой хаотической синхронизации, исследованы в существенно меньшей степени. Тем не менее, важно подчеркнуть, что понимание подобных процессов позволяет объяснить механизмы, приводящие к установлению синхронного режима, и, несомненно, имеет важное фундаментальное значение для всей теории хаотической синхронизации. Поэтому именно на рассмотрение процессов, происходящих на границе возникновения режима хаотической фазовой синхронизации, исследование характеристик наблюдающихся режимов и выявление механизмов, приводящих к установлению синхронной динамики, и направлена настоящая диссертационная работа, содержащая решение нескольких тесно взаимосвязанных друг с другом задач, касающихся поведения связанных хаотических осцилляторов вблизи границы возникновения синхронного режима.

Одной из задач, решенных в рамках настоящей диссертационной работы, является выявление различных особенностей разрушения (установления) режима хаотической фазовой синхронизации, в частности, механизмов, обуславливающих переход от режима синхронной динамики к асинхронному поведению в связанных осцилляторах при варьировании параметра связи.

---

<sup>1</sup>В связи с исторически сложившейся ситуацией, когда у термина “фазовая синхронизация” существует несколько различных определений, следует сразу отметить, что в настоящей диссертационной работе под этим термином понимается ситуация, когда имеет место захват мгновенных фаз хаотических сигналов, при этом мгновенная фаза может быть введена различными способами.

Интерес к данной проблеме вызван тем, что в подавляющем большинстве случаев исследователи не делают различий между теми или иными особенностями режима фазовой синхронизации и его установления/разрушения. В то же самое время, исключение из поля зрения вышеупомянутых особенностей может приводить к неправильной трактовке наблюдаемых явлений и ошибочным выводам. Поэтому выявление причин, приводящих к разрушению (установлению) хаотической фазовой синхронизации, а также исследование характеристик данного типа синхронной динамики имеет важное научное значение.

Другой задачей, решение которой содержится в настоящей диссертационной работе, и которая тесно связана с предыдущей, является определение статистических характеристик перемежающегося поведения, наблюдаемого ниже границы режима фазовой синхронизации. Наличие перемежающегося поведения характерно для многих нелинейных систем и наблюдается, в частности, при переходе от периодических колебаний к хаотическим, вблизи границы возникновения синхронных режимов связанных хаотических осцилляторов и в целом ряде других случаев. Существует определенная классификация перемежающегося поведения, в частности, выделяют перемежаемость типа I-III, on-off перемежаемость, перемежаемость игольного ушка.

Из научной литературы известно, что на границе фазовой синхронизации имеет место тип перемежаемости, называемый перемежаемостью игольного ушка (*eyelet intermittency*). Однако, следует заметить, что данный тип перемежаемости наблюдается лишь в том случае, когда величина расстройки основных частот взаимодействующих хаотических осцилляторов является достаточно малой. При большой же расстройке параметров (и, соответственно, частот) статистические характеристики перемежающегося поведения исследованы не были. Более того, не было даже известно, наблюдается в этом случае перемежающееся поведение при разрушении режима фазовой хаотической синхронизации, или нет. Учитывая, что при исследовании различных особенностей разрушения (возникновения) режима хаотической фазовой синхронизации (глава 1 настоящей диссертационной работы) было установлено, что механизмы, приводящие к разрушению синхронного режима, различны при больших и малых расстройках, следовало ожидать, что и характеристики перемежающегося поведения (если оно имеет место в этом случае) могут быть другими. Очевидно, что данная проблема имеет непосредственное отношение к более точному и полному пониманию процессов, происходящих вблизи границы фазовой синхронизации и, следовательно, необходимость изучения данного вопроса не вызывает сомнений.

Что касается перемежаемости игольного ушка, то и здесь до настоящего времени оставались невыясненные вопросы. Следует отметить, что для описания перемежающегося поведения традиционно используются две ос-

новые характеристики — зависимость средней длительности ламинарных фаз от параметра надкритичности и распределение длительностей ламинарных фаз (плотность вероятности наблюдать участок синхронной динамики определенной длительности). Для перемежаемости игольного ушка в научной литературе описан закон зависимости средней длительности ламинарных фаз (участков синхронного поведения) от параметра надкритичности<sup>2</sup>, тогда как аналитический закон распределения длительностей ламинарных фаз был неизвестен. В то же время, в ряде случаев единственной доступной для анализа характеристикой перемежающегося поведения является именно распределение длительностей ламинарных фаз, поскольку далеко не всегда в эксперименте исследователь может варьировать параметр надкритичности изучаемой системы, и, следовательно, зависимость средней длительности ламинарных фаз от параметра надкритичности не может быть получена. В настоящей диссертационной работе впервые удалось получить аналитический вид распределения длительностей ламинарных фаз для перемежаемости игольного ушка.

Еще одним направлением, тесно связанным с исследуемой в диссертационной работе проблемой, является анализ изменений, происходящих в спектре показателей Ляпунова при варьировании управляющих параметров, при котором происходит переход от режима фазовой синхронизации к асинхронной динамике.

Известно, что ляпуновские показатели представляют собой мощный инструмент для анализа сложной динамики систем. Одним из наиболее значимых приложений показателей Ляпунова является их использование для обнаружения качественных изменений в динамике системы при изменении управляющих параметров. Например, ляпуновские экспоненты используются для обнаружения перехода от хаотического режима к гиперхаосу<sup>3</sup>, для выявления наличия гиперболического аттрактора<sup>4</sup>, для детектирования обобщенной синхронизации<sup>5</sup> или индуцированной шумом синхронизации<sup>6</sup>, и так далее.

В рамках диссертационной работы рассмотрено поведение нулевой ляпуновской экспоненты. Несмотря на то, что этот ляпуновский показатель может претерпевать изменения (например, становится отрицательным), когда в системе происходят бифуркации, здесь и далее используется термин “нулевая

---

<sup>2</sup>W.-H. Kye and C.-M. Kim, *Characteristic relations of type-I intermittency in the presence of noise*, Phys. Rev. E **62** (2000), No. 5, 6304–6307.

<sup>3</sup>С.П. Кузнецов and Д.И. Трубецков, *Хаос и гиперхаос в лампе обратной волны*, Изв. вузов. Радиофизика **XLVII** (2004), No. 5–6, 383

<sup>4</sup>S.P. Kuznetsov, *Example of a physical system with a hyperbolic attractor of the smale-williams type*, Phys. Rev. Lett. **95** (2005), 144101.

<sup>5</sup>K. Pyragas, *Weak and strong synchronization of chaos*, Phys. Rev. E **54** (1996), No. 5, R4508–R4511; A.E. Hramov and A.A. Koronovskii, *Generalized synchronization: a modified system approach*, Phys. Rev. E **71** (2005), No. 6, 067201.

<sup>6</sup>D.S. Goldobin and A.S. Pikovsky, *Synchronization and desynchronization of self-sustained oscillators by common noise*, Phys. Rev. E **71** (2005), No. 4, 045201.

ляпуновская экспонента” для обращения именно к этому ляпуновскому показателю из всего спектра ляпуновских экспонент. Нулевая ляпуновская экспонента соответствует возмущению вдоль траектории в фазовом пространстве и в целом ряде случаев играет важную роль в описании поведения систем. Например, для детерминированного периодического осциллятора этот показатель является наибольшим по величине в спектре ляпуновских экспонент. В таких системах, управляемых внешним сигналом (детерминированным или случайным), старшая условная ляпуновская экспонента может стать отрицательной, что является признаком установления синхронного режима. Считается также, что в связанных хаотических осцилляторах переход нулевой ляпуновской экспоненты в область отрицательных значений тесно связан с установлением режима фазовой синхронизации<sup>7</sup>. В то же самое время известно<sup>8</sup>, что точка, соответствующая установлению режима фазовой синхронизации, и момент перехода нулевой ляпуновской экспоненты в область отрицательных значений не совпадают друг с другом и могут в значительной степени различаться. Вопрос о том, как именно связаны изменения, происходящие в динамике взаимодействующих осцилляторов при приближении к границе хаотической фазовой синхронизации с поведением нулевой ляпуновской экспоненты, нигде до настоящего момента рассмотрен не был, и решение данной задачи впервые приводится в настоящей диссертационной работе. Как будет показано в третьей главе диссертации, переход нулевой ляпуновской экспоненты в область отрицательных значений связан с перемежающимся поведением, наблюдающимся вблизи границы хаотической фазовой синхронизации (глава 2), а именно, с наличием ламинарных фаз (участков синхронного поведения для системы связанных осцилляторов). Для детального исследования этого вопроса в диссертационной работе введены в рассмотрение и изучены локальные ляпуновские показатели, отдельно для ламинарных и турбулентных фаз.

Таким образом, на основании вышеизложенного можно сделать вывод о том, что круг вопросов, рассмотренных в диссертационной работе, достаточно широк, а тема диссертационной работы является актуальной и важной для радиофизики и современной теории нелинейных колебаний и волн.

**Цель диссертационной работы.** Настоящая работа отражает результаты исследования процессов, происходящих на границе режима хаотической фазовой синхронизации. Целью настоящей диссертационной работы является выявление закономерностей в поведении хаотических осцилляторов, находящихся вблизи границы установления данного режима синхронной динамики, а также исследование характеристик непосредственно режима хаотической

---

<sup>7</sup>G. V. Osipov, B. Hu, C. T. Zhou, M. V. Ivanchenko, and J. Kurths, *Three types of transitions to phase synchronization in coupled chaotic oscillators*, Phys. Rev. Lett. **91** (2003), No. 2, 024101.

<sup>8</sup>A. Politi, F. Ginelli, S. Yanchuk, and Yu. Maistrenko, *From synchronization to lyapunov exponents and back*, Physica D **224** (2006), 90.

фазовой синхронизации. Основными вопросами, подробно рассмотренными в диссертационной работе, являются следующие:

- исследование особенностей разрушения/установления режима фазовой синхронизации хаотических осцилляторов при различных значениях частотной расстройки между ними;
- исследование статистических характеристик перемежающегося поведения, наблюдаемого в связанных хаотических осцилляторах вблизи границы режима фазовой синхронизации при переходе от синхронной динамики к асинхронному поведению;
- изучение возможности использования ляпуновских экспонент для определения границы возникновения хаотической синхронизации, в частности, исследование вопроса о том, какие изменения происходят в спектре условных ляпуновских экспонент при переходе через границу фазовой синхронизации и при дальнейшем изменении управляющих параметров;
- изучение поведения нулевого показателя Ляпунова в зависимости от значений управляющих параметров вблизи точки седло-узловой бифуркации;
- исследование локальных ляпуновских экспонент, рассчитанных по участкам, соответствующим ламинарным и турбулентным фазам, в однонаправленно связанных осцилляторах Ресслера.

Исследования, проведенные в рамках настоящей диссертационной работы, направлены на то, чтобы выявить и понять общие закономерности как синхронного поведения, так и поведения вблизи границы установления синхронного режима нелинейных динамических систем, демонстрирующих хаотическую динамику.

### **Положения, выносимые на защиту.**

1. Существуют два сценария разрушения/установления режима фазовой синхронизации взаимодействующих хаотических осцилляторов с ярко выраженной основной частотой колебаний. Первый тип разрушения фазовой синхронизации, наблюдающийся при малой расстройке собственных частот взаимодействующих осцилляторов, связан с нарушением общего ритма хаотических колебаний, в то время как аттракторы обеих хаотических систем сохраняют фазовую когерентность, то есть проекция фазовой траектории на некоторую плоскость состояний все время вращается вокруг начала координат, не пересекая и не огибая его. Вторым сценарий реализуется при большой величине частотной расстройки и обуславливается потерей фазовой когерентности хаотического аттрактора одного из взаимодействующих осцилляторов.

2. Каждый из сценариев разрушения режима хаотической фазовой синхронизации сопровождается перемежающимся поведением, при этом для малых значений расстройки собственных частот взаимодействующих осцилляторов имеет место перемежаемость игольного ушка, а для больших – перемежаемость кольца.
3. Распределение длительностей ламинарных фаз (участков синхронного поведения) для перемежаемости игольного ушка, наблюдающейся вблизи границы режима хаотической фазовой синхронизации в случае малых значений расстройки основных частот взаимодействующих осцилляторов, подчиняется экспоненциальному закону.
4. Нулевая условная ляпуновская экспонента, характеризующая поведение ведомого хаотического осциллятора, становится отрицательной раньше возникновения режима фазовой синхронизации, при этом отрицательность условной нулевой ляпуновской экспоненты является проявлением синхронизма, наблюдающегося на определенных временных интервалах (ламинарные фазы) вблизи границы установления режима фазовой синхронизации, где полностью синхронный режим еще не установился.

**Научная новизна.** Научная новизна результатов, представленных в диссертационной работе, заключается в установлении механизмов, обуславливающих процессы, происходящие вблизи границы хаотической фазовой синхронизации взаимодействующих связанных хаотических осцилляторов, и детальном анализе различных характеристик данных процессов.

Впервые получены следующие научные результаты:

- показано существование двух сценариев разрушения/установления режима хаотической фазовой синхронизации, реализующихся при большой и малой величине расстройки частот взаимодействующих осцилляторов. Выявлены механизмы этих типов разрушения синхронной динамики;
- исследованы статистические характеристики перемежающегося поведения на границе режима фазовой синхронизации в обоих случаях. Полученные результаты позволяют сделать вывод о том, что при малой и большой расстройках управляющих параметров реализуются разные типы перемежающегося поведения;
- выявлены механизмы, приводящие к возникновению перемежаемости типа игольного ушка, наблюдаемой при малых частотных расстройках взаимодействующих осцилляторов ниже границы фазовой синхронизации. Впервые получен аналитический вид распределения длительностей ламинарных фаз в зависимости от управляющего параметра для данного типа перемежающегося поведения;



- впервые описано перемежающееся поведение типа кольца (ring intermittency), выявлены обуславливающие его механизмы. Исследованы статистические характеристики перемежаемости кольца: аналитически получен закон для зависимости средней длительности ламинарных фаз от параметра надкритичности, а также вид распределения длительностей ламинарных фаз в зависимости от значения управляющего параметра;
- изучен вопрос об использовании условных ляпуновских экспонент для определения границы возникновения хаотической фазовой синхронизации;
- исследовано поведение нулевой ляпуновской экспоненты в окрестности бифуркационной точки, которая в случае связанных хаотических осцилляторов лежит ниже границы режима фазовой синхронизации. Аналитически получены зависимости данного показателя Ляпунова от управляющих параметров как выше, так и ниже точки бифуркации. Построенная теория применима как при условии случайного воздействия на систему, так и в случае, когда внешний сигнал имеет детерминированную природу;
- исследовано поведение локальных ляпуновских экспонент, соответствующих ламинарным и турбулентным фазам в динамике связанных хаотических осцилляторов;

**Научная и практическая значимость работы.** Диссертационная работа решает научную задачу, имеющую существенное значение для радиофизики и современной теории колебаний и волн, связанную с выявлением общих закономерностей установления/разрушения синхронного поведения в нелинейных автоколебательных системах. В большинстве случаев исследование проводилось на примере эталонных моделей нелинейной динамики, таких как автогенератор Ван дер Поля, система Ресслера, квадратичное отображение и отображение окружности. Так как все рассмотренные модели по своей сути являются базовыми, результаты, полученные в рамках настоящей диссертационной работы, имеют общий характер и могут быть распространены на системы различной природы (радиофизической, биологической, физиологической и т.д.). Полученные результаты позволяют продвинуться в понимании общих закономерностей синхронного поведения связанных динамических систем и выявить механизмы их возникновения. В частности, выявление взаимосвязи между динамикой связанных хаотических осцилляторов вблизи границы возникновения режима фазовой синхронизации и поведением нулевой условной ляпуновской экспоненты имеет важное не только теоретическое, но и прикладное значение, поскольку позволяет адекватно применять аппа-

рат, связанный с использованием ляпуновских экспонент, при изучении самого широкого круга нелинейных хаотических систем, значения управляющих параметров которых находятся вблизи границы установления синхронного режима.

Понимание механизмов установления/разрушения режима фазовой хаотической синхронизации при различных значениях расстроек управляющих параметров взаимодействующих систем позволило объяснить причины возникновения перемежающегося поведения, наблюдаемого вблизи границы установления синхронного режима и получить аналитические зависимости для его характеристик. Более того, использованные в рамках диссертационной работы сходства между стохастическими процессами и динамическим хаосом позволяют расширить применимость полученных результатов на широкий класс систем, находящихся под воздействием шумов. Очевидно, что шумы неизбежно присутствуют как при численном моделировании, так и при проведении экспериментальных измерений. И хотя в ряде случаев влиянием шумов на поведение системы можно пренебречь, роль шумов становится чрезвычайно важной при рассмотрении динамики систем вблизи точек бифуркации. Как следствие, поведение системы в окрестности бифуркационных точек в присутствии шумов может существенным образом отличаться от случая, когда шумы в рассмотрение не принимаются. В частности, известно, что шум существенно изменяет статистические характеристики перемежающегося поведения. Поэтому несомненно, что выявление особенностей поведения систем, обусловленных шумом, и выяснение, к каким изменениям количественных характеристик (таких, например, как ляпуновские экспоненты) приводит воздействие шума, имеет важное практическое значение.

Результаты, изложенные в диссертационной работе, внедрены в учебный процесс по подготовке специалистов по специальности “Радиофизика и электроника”, а также по направлению подготовки бакалавров и магистров “Радиофизика” в ГОУ ВПО “Саратовский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского”.

### **Достоверность полученных результатов**

Достоверность полученных результатов обеспечивается использованием строгих математических процедур; твердо установленных уравнений, описывающих физические процессы; общепризнанных методов и подходов, хорошо зарекомендовавших себя при проведении научных исследований, и апробированных на различных системах, демонстрирующих хаотическое поведение; обоснованным выбором параметров численных методов. Кроме того, достоверность полученных результатов подтверждается их воспроизводимостью, сопоставлением аналитических выражений и численно полученных данных, совпадением результатов при использовании различных методов диагностики колебательных режимов, а также отсутствием противоречий с известными в

научной литературе достоверными общепризнанными фактами.

### **Личный вклад.**

Основу диссертации составляют результаты, полученные лично соискателем. Им выполнены все численные и аналитические расчеты. Постановка задач, разработка методов их решения, объяснение и интерпретация результатов были осуществлены либо лично автором, либо совместно с научным руководителем.

### **Апробация работы.**

Материалы диссертационной работы использовались при выполнении научно-исследовательских работ по гранту Российского Фонда Фундаментальных Исследований (проект 07-02-00044-а), Федеральной целевой научно-технической программы “Исследования и разработки по приоритетным направлениям развития науки и техники на 2005-2006 годы” (2006-РИ-19.0/001/053, 2006-РИ-19.0/001/054, 2006-РИ-112.0/001/228), Федеральной целевой программы “Исследования и разработки по приоритетным направлениям развития научно-технологического комплекса России на 2007-2012 годы” (2008-10-1.4-15-06), Президентской Программы поддержки ведущих научных школ Российской Федерации (2006-2007 и 2008-2009 гг, руководитель ведущей научной школы — чл.-корр. РАН, профессор Д.И. Трубецков), научно-образовательного центра “Нелинейная динамика и биофизика” при Саратовском госуниверситете (грант REC-006 of U.S. Civilian Research & Development Foundation for the Independent States of the Former Soviet Union (CRDF)), Фонда некоммерческих программ “Династия” и Московского Международного Центра Фундаментальной Физики (лауреат конкурса среди аспирантов и молодых ученых без степени — с 2008 года). В 2008 году Куровская М.К. награждена медалью Российской Академии Наук.

Представленные результаты неоднократно докладывались на различных научных конференциях и семинарах и отражены в тезисах докладов: VII Международной школы “Хаотические автоколебания и образование структур” - ХАОС-2004 (Саратов, октябрь 2004), XII Всероссийской научной школе-конференции “Нелинейные дни в Саратове для молодых — 2004” (Саратов, ноябрь 2004), Международной школы-семинара по фундаментальной физике для молодых ученых “Квантовые измерения и физика мезоскопических систем” (Владимир, февраль 2005), III Международной конференции “Фундаментальные проблемы физики” (Казань, июнь 2005), VII Всероссийской научной конференции “Нелинейные колебания механических систем” (Нижний Новгород, сентябрь 2005), X Всероссийской школы-семинара “Физика и применение микроволн (Волны-2005)” (Звенигород, май 2005), International Symposium “Topical Problems of Nonlinear Wave Physics (NWP-2005)” (Nizhny Novgorod, August, 2005), XI Всероссийской научной школы-семинара “Волновые явления в неоднородных средах

(Волны–2006)” (Звенигород, май 2006), XIV Всероссийской научной школы–конференции “Нелинейные дни в Саратове для молодых — 2006” (Саратов, ноябрь 2006), XI Всероссийской школы–семинара “Физика и применение микроволн” (Звенигород, май 2007), VIII Международной школы “Хаотические автоколебания и образование структур (ХАОС–2007)” (Саратов, октябрь 2007), XIV научной школы “Нелинейные волны — 2008” (Нижний Новгород, март 2008), Chaotic Modeling and Simulation International Conference “СНАОС 2008” (Chania, Crete, Greece, June, 2008), всего 13 публикаций в трудах конференций. Результаты, изложенные в диссертационной работе, неоднократно обсуждались на научных семинарах кафедры электроники, колебаний и волн и кафедры нелинейной физики факультета нелинейных процессов СГУ.

### **Публикации.**

Результаты работы опубликованы в центральных реферируемых научных журналах, таких как “Журнал технической физики” (1 статья), “Письма в журнал технической физики” (3 статьи), “Электромагнитные волны и электронные системы” (1 статья), “Physical Review Letters” (1 статья), “Physical Review E” (4 статьи), всего 10 статей в журналах, рекомендованных ВАК РФ для опубликования основных научных результатов диссертаций на соискание ученой степени доктора и кандидата наук.

### **Структура и объём работы.**

Диссертационная работа состоит из введения, трех глав и заключения. Логика изложения материала в диссертационной работе построена так, что результаты, полученные в каждой из начальных глав, являются основой для постановки задач, рассматриваемых в последующих главах. Так выявленные и описанные в рамках первой главы два сценария разрушения/установления режима хаотической фазовой синхронизации со всей необходимостью ставят вопрос о различиях, наблюдающихся во внешнем поведении систем (перемежаемость) и в количественных характеристиках (нулевая ляпуновская экспонента) при больших и малых значениях расстройек параметров взаимодействующих систем. Выяснению этих вопросов посвящены две последующие главы, причем результаты, изложенные во второй главе, во многом являются основой для рассмотрения поведения условной нулевой ляпуновской экспоненты, проведенного в третьей главе диссертационной работы. Логика же каждой главы диссертационной работы построена следующим образом. В начале главы описывается современное состояние проблемы, которой посвящена глава. Далее, на основании вышеизложенного, ставятся вопросы и проблемы, на решение которых направлены остальные разделы главы диссертационной работы.

Общий объем диссертации составляет 184 страницы текста, включая 40 иллюстраций и список использованных источников, содержащий 126 наиме-

нований.

## СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **Введении** обоснована актуальность выбранной темы диссертационной работы, сформулирована цель работы, описаны научная новизна и практическая значимость полученных результатов. Введение содержит основные положения и результаты, выносимые на защиту, сведения о достоверности и апробации результатов.

**Первая глава** диссертационной работы посвящена рассмотрению особенностей разрушения режима хаотической фазовой синхронизации и выявлению основных механизмов, обуславливающих возникновение этих особенностей в поведении взаимодействующих систем вблизи границы установления режима хаотической фазовой синхронизации.

В первом разделе главы обсуждаются общепринятые определения и подходы к изучению режима фазовой хаотической синхронизации, которые затем используются на протяжении всей диссертационной работы и которые необходимы для понимания и логичного изложения всего материала.

Дальнейшее изложение материала главы посвящено всестороннему рассмотрению двух различных сценариев разрушения режима фазовой синхронизации во взаимодействующих друг с другом хаотических осцилляторах. Сначала рассматриваются особенности разрушения режима фазовой синхронизации в двух однонаправленно связанных эталонных системах с потоковым временем — осцилляторах Ресслера. Показано, что разрушение режима хаотической фазовой синхронизации, в зависимости от величины частотной расстройки между взаимодействующими хаотическими системами, происходит по-разному, а именно, существуют два сценария разрушения режима фазовой синхронизации, один из которых реализуется в случае малой расстройки управляющих параметров, а второй — в случае большой. При большой величине частотной расстройки разрушение режима хаотической фазовой синхронизации сопровождается потерей фазовой когерентности<sup>9</sup> хаотического аттрактора ведомой системы. В синхронном режиме ведомая система характеризуется фазово-когерентным хаотическим аттрактором, в то время как ниже границы фазовой синхронизации хаотический аттрактор ведомой системы Ресслера становится фазово-некогерентным, что, фактически, и приводит к разрушению синхронного режима. В случае малой расстройки параметров при уменьшении величины связи режим фазовой синхронизации разрушается, хотя хаотические аттракторы остаются фазово-когерентными. Для количественной характеристики когерентности/некогерентности аттрактора введена в рассмотрение мера фазовой когерентности хаотического ат-

---

<sup>9</sup> Аттрактор является фазово-когерентным, если проекция фазовой траектории на некоторую плоскость состояний все время вращается вокруг начала координат, не пересекая и не огибая его.

трактора как минимальное расстояние между точками фазовой траектории и началом координат.

Следующий раздел посвящен выявлению механизмов, реализующихся при малых и больших значениях частотной расстройке взаимодействующих осцилляторов, и, соответственно, объяснению сценариев разрушения синхронного режима, описанных в предыдущем разделе. С этой целью с позиций фазовой синхронизации рассматривается разрушение синхронного режима в случае классической синхронизации генератора Ван-дер-Поля, находящегося под внешним гармоническим воздействием. Очевидно, что в рассматриваемом случае колебания в системе, конечно, не являются хаотическими, но все традиционно используемые понятия, такие как фаза сигнала, фазовая синхронизация, фазовая когерентность аттрактора, можно легко применить и в этом случае, точно так же, как это делается при рассмотрении поведения хаотических осцилляторов. В этом разделе показано, что, как и в случае связанных систем Ресслера, рассмотренных ранее, для периодического осциллятора, находящегося под внешним гармоническим воздействием, существуют два тех же самых сценария разрушения синхронного режима, что и для хаотических осцилляторов, и выявлены механизмы, обуславливающие эти сценарии.

Для подтверждения полученных результатов, а также для того, чтобы подчеркнуть их общность для широкого круга нелинейных систем, в следующем разделе приводится описание исследования поведения двух взаимно связанных хаотических генераторов с туннельным диодом, и показывается, что и в этом случае имеют место те же самые два сценария разрушения/установления режима фазовой хаотической синхронизации, для малых и больших значений частотных расстройек, соответственно.

Наконец, особый интерес представляет вопрос о разрушении синхронного режима в том случае, когда хаотические аттракторы взаимодействующих осцилляторов изначально являются фазово-некогерентными. Очевидно, что в этом случае нельзя напрямую применять традиционные способы введения фазы для хаотического сигнала. В то же самое время, известно, что взаимодействующие осцилляторы с фазово-некогерентными аттракторами могут демонстрировать синхронную динамику. Для выяснения этого вопроса рассмотрены два взаимно связанных осциллятора Ресслера с изначально фазово-некогерентными хаотическими аттракторами, при этом для исследования режима фазовой синхронизации фаза  $\varphi(t)$  определялась как угол поворота  $\varphi = \arctg(\dot{y}/\dot{x})$  на плоскости скоростей  $(\dot{x}; \dot{y})$ . Результаты проведенных исследований показывают, что и для двух связанных систем с изначально спиральными аттракторами реализуются те же самые два сценария перехода от синхронной динамики к асинхронной.

Во **второй главе** диссертационной работы обсуждается перемежающее-

ся поведение, наблюдающееся при разрушении режима хаотической фазовой синхронизации вблизи границы синхронного режима. Ниже границы режима фазовой синхронизации зависимость разности фаз от времени  $\Delta\varphi(t)$  содержит участки синхронного поведения (ламинарные фазы) постоянно прерывающиеся внезапными фазовыми проскоками (турбулентные фазы), в течение которых значение  $|\Delta\varphi(t)|$  изменяется на  $2\pi$ . Показано, что выявленные в первой главе диссертационной работы два сценария разрушения режима хаотической фазовой синхронизации находят свое отражение в двух различных типах перемежающегося поведения, реализующихся в непосредственной близости границы синхронного режима при больших и малых значениях частотной расстройки, соответственно.

В начале главы детально обсуждается вопрос о перемежающемся поведении, возникающем ниже границы фазовой синхронизации в случае малых частотных расстроек между взаимодействующими осцилляторами (так называемая перемежаемость игольного ушка), а затем рассматриваются примеры различных систем, демонстрирующих данный тип поведения. В рамках последующих разделов показано, что перемежающееся поведение типа I в закритической области значений управляющих параметров в присутствии шума, имеющее место вблизи точки седло-узловой бифуркации, и перемежаемость игольного ушка, наблюдающаяся в окрестности разрушения режима хаотической фазовой синхронизации при малых значениях частотной расстройки взаимодействующих осцилляторов, фактически, являются одним типом динамики систем. Различие между данными типами перемежаемости заключается только в характере внешнего сигнала (случайное воздействие или хаотический сигнал), воздействующего на систему, в то время как основные механизмы, обуславливающие поведение систем, равно как и характеристики динамики системы, оказываются одними и теми же в обоих случаях.

Следующий раздел второй главы посвящен выводу аналитического выражения для распределения длительностей ламинарных фаз при перемежаемости игольного ушка, которое до настоящего времени получить не удавалось. В этом разделе аналитически найден вид распределения длительностей ламинарных фаз для перемежаемости игольного ушка, который сопоставлен с результатами численного моделирования поведения эталонных нелинейных систем. Показано, что распределение длительностей ламинарных фаз этого типа перемежающегося поведения удовлетворяет экспоненциальному закону

$$p(t) = T^{-1} \exp(-t/T), \quad (1)$$

где  $T$  — средняя длительность ламинарных фаз. Полученное аналитическое выражение (1) находится в очень хорошем соответствии с результатами численного моделирования.

Далее во второй главе диссертационной работы рассмотрено перемежающееся поведение при больших значениях расстройки собственных частот

взаимодействующих осцилляторов. Для данного типа перемежаемости построена соответствующая теория, выявлен механизм, приводящий к возникновению перемежающегося поведения данного типа, получена теоретическая зависимость средней длительности ламинарных фаз от параметра связи, хорошо согласующаяся с численными данными. Показано, что распределение  $N(\tau)$  длительностей ламинарных фаз  $\tau$  удовлетворяет экспоненциальному закону

$$N(\tau) = A \exp(k\tau), \quad \tau > T, \quad (2)$$

где  $k < 0$  — величина, определяемая значениями управляющих параметров рассматриваемых систем,  $A$  — нормировочный коэффициент, величина  $T \approx 1/|f_r - f_d|$  определяется разностью основных частот ведущей ( $f_d$ ) и ведомой ( $f_r$ ) систем. Зависимость средней длительности ламинарных фаз от параметра надкритичности описывается соотношением

$$\langle \tau(\varepsilon) \rangle = T \left( 1 - \ln^{-1} \left( \frac{\varepsilon - \varepsilon_t}{\varepsilon_c - \varepsilon_t} \right) \right), \quad (3)$$

где  $\varepsilon \in (\varepsilon_t, \varepsilon_c)$  — величина параметра связи,  $\varepsilon_t < \varepsilon_c$  — границы диапазона, в котором наблюдается перемежающееся поведение. Аналитические соотношения, полученные в рамках данного раздела, сопоставлены с результатами численного исследования перемежающегося поведения связанных модельных систем, изложенными в заключительных разделах этой главы диссертации.

В **третьей главе** диссертационной работы рассматривается поведение ляпуновских экспонент вблизи границы хаотической фазовой синхронизации, при этом особое внимание уделяется условной нулевой ляпуновской экспоненте.

В начале главы подробно рассмотрен вопрос об использовании ляпуновских показателей для определения границы режима хаотической фазовой синхронизации. На примере двух однонаправленно связанных осцилляторов Ресслера обсуждается проблема взаимосвязи границы возникновения режима фазовой синхронизации на плоскости “расстройка управляющих параметров систем — интенсивность связи” с поведением старших ляпуновских показателей, характеризующих динамику системы. Показано, что ни один из старших показателей Ляпунова не является непосредственно связанным с моментом установления/разрушения синхронного режима.

Далее исследуется поведение нулевой ляпуновской экспоненты в окрестности бифуркационной точки. Аналитически получены зависимости ляпуновской экспоненты от управляющего параметра как выше, так и ниже точки бифуркации. Построенная теория применима как для систем со случайным внешним воздействием, так и в случае связанных хаотических осцилляторов. Справедливость аналитических выражений доказана с помощью численного моделирования некоторых эталонных систем, показано прекрасное соот-



ветствие теоретических выводов и результатов, полученных при численном моделировании.

Наконец, для объяснения механизмов, обуславливающих переход нулевой ляпуновской экспоненты в область отрицательных значений, в рассмотрение вводятся локальные показатели Ляпунова, рассчитанные по участкам синхронной динамики (ламинарные фазы) и для турбулентных фаз. Построены распределения локальных ляпуновских экспонент. Показано, что за отрицательность условной нулевой ляпуновской экспоненты отвечают ламинарные фазы: распределение локальных условных показателей Ляпунова на плоскости “значение условной ляпуновской экспоненты — длительность фазы” сдвигается в область отрицательных значений, в то время как распределение соответствующих экспонент для турбулентных фаз остается практически симметричным относительно нулевого значения. Отрицательность условной нулевой ляпуновской экспоненты является проявлением синхронизма, наблюдающегося на определенных временных интервалах вблизи границы установления режима фазовой синхронизации, где полностью синхронный режим еще не установился.

В **Заключении** подведены итоги диссертационной работы, сформулированы основные результаты и указаны возможные направления дальнейших исследований по данной тематике.

## **Основные результаты и выводы**

1. Показано существование двух сценариев разрушения/установления режима хаотической фазовой синхронизации, выявлены механизмы этих типов разрушения синхронной динамики.
2. Исследованы статистические характеристики перемежающегося поведения на границе режима фазовой синхронизации. Впервые получены аналитические зависимости для распределения длительностей ламинарных фаз при перемежаемости игольного ушка и перемежаемости кольца.
3. Изучен вопрос об использовании условных ляпуновских экспонент для определения границы возникновения хаотической фазовой синхронизации.
4. Исследовано поведение нулевой ляпуновской экспоненты в окрестности бифуркационной точки. Аналитически получены зависимости данного показателя Ляпунова от управляющих параметров как выше, так и ниже точки бифуркации.
5. Исследовано поведение локальных ляпуновских экспонент, соответствующих ламинарному и турбулентным фазам в динамике связанных хаотических осцилляторов.

**Основные результаты диссертации опубликованы в следующих работах:**

- [1] A. E. Hramov, A. A. Koronovskii, M. K. Kurovskaya, *Zero Lyapunov exponent in the vicinity of the saddle-node bifurcation point in the presence of noise*, Phys. Rev. E **78** (2008), 036212.
- [2] Куровская М.К., *Распределение длительностей ламинарных фаз при перемежаемости “угольного ушка”*, Письма в ЖТФ **34** (2008), No. 24, 48–54.
- [3] А. А. Короновский, М. К. Куровская, О. И. Москаленко, А. Е. Храмов, *Два сценария разрушения режима хаотической фазовой синхронизации*, ЖТФ **77** (2007), No. 1, 21–29.
- [4] A. E. Hramov, A. A. Koronovskii, M. K. Kurovskaya, *Two types of phase synchronization destruction*, Phys. Rev. E **75** (2007), No. 3, 036205.
- [5] A. E. Hramov, A. A. Koronovskii, M. K. Kurovskaya, Alexey A. Ovchinnikov, and S. Boccaletti, *Length distribution of laminar phases for type-I intermittency in the presence of noise*, Phys. Rev. E **76** (2007), No. 2, 026206.
- [6] Храмов А.Е. Короновский А.А., Куровская М.К., *Разрушение режима фазовой хаотической синхронизации*, Электромагнитные волны и электронные системы **12** (2007), No. 4, 20–23.
- [7] A. E. Hramov, A. A. Koronovskii, M. K. Kurovskaya, S. Boccaletti, *Ring intermittency in coupled chaotic oscillators at the boundary of phase synchronization*, Phys. Rev. Lett. **97** (2006), 114101.
- [8] А. А. Короновский, М. К. Куровская, А. Е. Храмов, *Временное запаздывание между неустойчивыми периодическими орбитами связанных хаотических осцилляторов*, Письма в ЖТФ **31** (2005), No. 3, 60–66.
- [9] A. E. Hramov, A. A. Koronovskii, M. K. Kurovskaya, O. I. Moskalenko, *Synchronization of spectral components and its regularities in chaotic dynamical systems*, Phys. Rev. E **71** (2005), No. 5, 056204.
- [10] А. А. Короновский, М. К. Куровская, А. Е. Храмов, *О соотношении фазовой синхронизации хаотических осцилляторов и синхронизации временных масштабов*, Письма в ЖТФ **31** (2005), No. 19, 76–82.
- [11] A. E. Hramov, A. A. Koronovskii, M. K. Kurovskaya, *Characteristics of eyelet intermittency*, Book of Abstracts. Chaotic Modeling and Simulation International Conference “СНАОS 2008” (June 3-6, 2008, Chania, Crete, Greece), 2008, 32–33.
- [12] М. К. Куровская, *Исследование характеристик перемежающегося поведения на границе хаотической фазовой синхронизации*, Тезисы докладов XIV научной школы “Нелинейные волны — 2008”, март 2008, 101–102.
- [13] Стефано Боккалетти, М. К. Куровская, А. А. Короновский, А. Е. Храмов, *Новый тип перемежающегося поведения вблизи границы фазовой синхронизации*, Труды X Всероссийской школы-семинара “Физика и применение микроволн” (21–26 мая 2007 года, Звенигород, Московская область, Россия), секция 5, 2007, 5–6.

- [14] М. К. Куровская, *Распределение длительностей ламинарных фаз в случае перемежаемости “игольного ушка”*, Материалы VIII Международной школы “Хаотические автоколебания и образование структур (ХАОС–2007)” (9–14 октября 2007 года, Саратов, Россия), 90–91.
- [15] М. К. Куровская, А. А. Короновский, А. Е. Храмов, *Механизмы разрушения режима фазовой хаотической синхронизации в связанных осцилляторах*, Труды школы-семинара “Волны–2006”. Московская область, пансионат “Университетский”, 22–27 мая 2006 г., 2006, 9–11.
- [16] М. К. Куровская, *Новый тип перемежаемости вблизи границы возникновения фазовой синхронизации*, Материалы научной школы конференции “Нелинейные дни в Саратове для молодых — 2006”, РИО журнала “Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика”, 179–182.
- [17] М. К. Куровская, *Изучение фазового сдвига между неустойчивыми седловыми орбитами*, Международная школа-семинар по фундаментальной физике для молодых ученых «Квантовые измерения и физика мезоскопических систем». Программа и тезисы докладов, Владимирский государственный университет, 65.
- [18] А. А. Короновский, М. К. Куровская, А. Е. Храмов, *Взаимосвязь фазовой синхронизации и синхронизации временных масштабов*, Сборник тезисов III Международной конференции “Фундментальные проблемы физики” (13–18 июня 2005 года, Казань, Россия), 2005, 174.
- [19] А. А. Короновский, М. К. Куровская, А. Е. Храмов, *Взаимосвязь фазовой синхронизации и синхронизации временных масштабов*, Труды VII Всероссийской научной конференции “Нелинейные колебания механических систем” (19–22 сентября 2005 года, Нижний Новгород, Россия), 2005, 108–109.
- [20] А. А. Короновский, М. К. Куровская, А. Е. Храмов, *Соотношение режима фазовой синхронизации и синхронизации временных масштабов*, Труды X Всероссийской школы-семинара “Физика и применение микроволн” (23–28 мая 2005 года, Звенигород, Московская область, Россия), секция 3, 2005, 18–19.
- [21] А. Е. Храмов, А. А. Koronovskii, М. К. Kurovskaya, О. I. Moskalenko, *Regularities appearing in Fourier spectra of coupled chaotic oscillators at transition from time scale synchronization to lag synchronization*, Proceedings of International Symposium “Topical Problems of Nonlinear Wave Physics (NWP-2005)” (2-9 August 2005, Nizhny Novgorod, Russia), 2005, 50–51.
- [22] А. А. Короновский, М. К. Куровская, А. Е. Храмов, *Синхронизация спектральных компонент и ее связь с седловыми периодическими орбитами*, Материалы VII Международной школы “Хаотические автоколебания и образование структур” (1-6 октября 2004 года, Саратов), 2004, 74.
- [23] М. К. Куровская, *Изучение фазового сдвига между неустойчивыми периодическими орбитами во взаимно связанных системах Рёсслера*, Материалы научной школы-конференции “Нелинейные дни в Саратове для молодых - 2004”, ГосУНЦ “Колледж”, 135–138.

КУРОВСКАЯ Мария Константиновна

ОСОБЕННОСТИ ПОВЕДЕНИЯ НЕКОТОРЫХ  
НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ ВБЛИЗИ ГРАНИЦЫ РЕЖИМА  
ХАОТИЧЕСКОЙ ФАЗОВОЙ СИНХРОНИЗАЦИИ  
(РАЗРУШЕНИЕ/УСТАНОВЛЕНИЕ СИНХРОННОГО  
РЕЖИМА, ПЕРЕМЕЖАЮЩЕЕСЯ ПОВЕДЕНИЕ)

Автореферат

---

Подписано к печати 18.03.2009 Формат 60 × 84 1/16.  
Бумага офсетная. Гарнитура “Times”  
Усл. печ. л. 1,39 (1,5). Тираж 120 экз. Заказ 58-Т.

---

Отпечатано с готового оригинал-макета  
Типография СГУ.  
410012, Саратов, Большая Казачья, 112а, корпус 8.